Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université de Relizane — Faculté des Sciences et de la Technologie

Département de MI, 1 ère année MI — Année universitaire:2023-2024

Module : Analyse 2, Session : Normale — Durée : 1h30, Date : 08/05/2024

**Exercice 1: (7 point)** Calculer les intégrales suivantes:

1) $I_1(x) = \int \frac{4x+3}{2x^2+x+3}dx$ 2) $I_2(x) = \int (\ln x)\, dx$ 3) $I_3(x) = \int \frac{3+2\sin x}{1+\sin x}(\cos x)\, dx$.

**Exercice 2: (7 point)** Résoudre les équations différentielles suivantes

1) $xy' + y = 0$ 2) $y' = x^2e^{-y}$ 3) $y' = y + y^2$.

**Exercice 3: (6 point)** Soit $f(x) = -\frac{2}{3}(1-x)\sqrt{1-x}$ et $I_n = \int_0^1 x^n\sqrt{1-x}dx$.

1) Vérifier que $\forall x < 1, f'(x) = \sqrt{1-x}$ 2) Calculer $I_0$.

3) Déterminer une relation entre $I_n$ et $I_{n-1}$ pour $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$.

*Bon courage*

.........................................................................................................................

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université de Relizane — Faculté des Sciences et de la Technologie

Département de MI, 1 ère année MI — Année universitaire:2023-2024

Module : Analyse 2, Session : Normale — Durée : 1h30, Date : 08/05/2024

**Exercice 1: (7 point)** Calculer les intégrales suivantes:

1) $I_1(x) = \int \frac{4x+3}{2x^2+x+3}dx$ 2) $I_2(x) = \int (\ln x)\, dx$ 3) $I_3(x) = \int \frac{3+2\sin x}{1+\sin x}(\cos x)\, dx$.

**Exercice 2: (7 point)** Résoudre les équations différentielles suivantes

1) $xy' + y = 0$ 2) $y' = x^2e^{-y}$ 3) $y' = y + y^2$.

**Exercice 3: (6 point)** Soit $f(x) = -\frac{2}{3}(1-x)\sqrt{1-x}$ et $I_n = \int_0^1 x^n\sqrt{1-x}dx$.

1) Vérifier que $\forall x < 1, f'(x) = \sqrt{1-x}$ 2) Calculer $I_0$.

3) Déterminer une relation entre $I_n$ et $I_{n-1}$ pour $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$.

*Bon courage*

Correction

**Exercice 1:**

1) On calcule l'intégrale:$I = \int \frac{4x+3}{2x^2+x+3}dx$

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{4x+3}{2x^2+x+3}\,\mathrm{d}x \\
&= \int \frac{2x+\frac{1}{2}+1}{x^2+\frac{x}{2}+\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x.............(0.5) \\
&= \int \frac{2x+\frac{1}{2}}{x^2+\frac{x}{2}+\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x + \int \frac{1}{x^2+\frac{x}{2}+\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x.............(0.5) \\
&= \ln\left(x^2+\frac{x}{2}+\frac{3}{2}\right) + \int \frac{1}{x^2+\frac{x}{2}+\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x........................(0.5)
\end{aligned}$$

pour l'intégrale:

$$\begin{aligned}
J &= \int \frac{1}{x^2+\frac{x}{2}+\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{x^2+\frac{x}{2}+\frac{1}{16}+-\frac{1}{16}+\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x \\
&= \int \frac{1}{\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{23}{16}}\,\mathrm{d}x = \frac{16}{23}\int \frac{1}{\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{23}{16}}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{16}{23}\int \frac{1}{\left(\frac{4x+1}{\sqrt{23}}\right)^2+1}\,\mathrm{d}x.............(1) \\
\text{on pose} &: \; y = \frac{4x+1}{\sqrt{23}} \Rightarrow \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{23}}{4}\mathrm{d}x \\
&\Rightarrow J = \frac{4}{\sqrt{23}}\int \frac{1}{y^2+1}\mathrm{d}y = \frac{4}{\sqrt{23}}\arctan y + C_1, C_1 \in \mathbb{R} \\
&= \frac{4}{\sqrt{23}}\arctan\left(\frac{4x+1}{\sqrt{23}}\right) + C_1, C_1 \in \mathbb{R} \\
&\Rightarrow I = \ln\left(x^2+\frac{x}{2}+\frac{3}{2}\right) + \frac{4}{\sqrt{23}}\arctan\left(\frac{4x+1}{\sqrt{23}}\right) + C, C \in \mathbb{R}.........(0.5)
\end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned}
I_2(x) &= \int (\ln x)\,dx \\
&= x\ln x - \int x\frac{1}{x}dx......(1) \\
&= x\ln x - x + c, c \in \mathbb{R}.......(1)
\end{aligned}$$

3) On calcule $I_3(x) = \displaystyle\int \frac{3+2\sin x}{1+\sin x}(\cos x)\,dx$

Si $y = \sin x$ on trouve $y' = (\cos x)\,dx$.............. $(0,5)$

$$\begin{aligned}\int \frac{3+2\sin x}{1+\sin x}(\cos x)\,dx &= \int \frac{3+2y}{1+y}dy \\ &= \int 2+\frac{1}{1+y}dy ...... (0.5) \\ &= 2y+\ln y + C, C\in\mathbb{R}..... (0.5) \\ &= 2\sin x + \ln|\sin x| + c, c\in\mathbb{R}......... (0.5)\end{aligned}$$

**Exercice 2: (7 point)** Résoudre les équations différentielles suivantes

1) $xy' + y = 0$

c'est à dire $\frac{y'}{y} = -\frac{1}{x}$.............. $(0.5)$

donc $\ln|y| = -\ln|x|$, .................. $(0.5)$

alors $y = \frac{1}{x} + c$ ou $y = -\frac{1}{x} + c, c\in\mathbb{R}$.............. $(1)$

2) $y' = x^2e^{-y}$ donc $y'e^y = x^2$............. $(0.5)$

alors $\displaystyle\int y'e^y dx = \int x^2 dx$............. $(0.5)$

aunsi $e^y = \dfrac{x^3}{3} + c, c\in\mathbb{R}$.............. $(0.5)$

finalement $y = \ln\left(\dfrac{x^3}{3} + c\right), c\in\mathbb{R}$.............. $(0.5)$

3) $y' = y + y^2$ ce qui nous donne $\frac{y'}{y} = \frac{y}{y^2} + 1$......... $(0.5)$

alors $\frac{y'}{y^2} = \frac{1}{y} + 1$.................... $(0.5)$

On choisit $z = \frac{1}{y}$ donc $z' = -\frac{y'}{y^2}$, ......... $(0.5)$

on trouve $z' = z + 1$.................. $(0.5)$

c'est à dire $\ln|z+1| = x + c, c\in\mathbb{R}$, .......... $(0.5)$

finalement $z = ke^x - 1, k\in\mathbb{R}$........... $(0.5)$

**Exercice 3: (6 point)** Soit $f(x) = -\frac{2}{3}(1-x)\sqrt{1-x}$ et $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n\sqrt{1-x}dx$.

1) Vérifier que $\forall x < 1, f'(x) = \sqrt{1-x}$

$f'(x) = \frac{2}{3}\sqrt{1-x} + \frac{2}{3}(1-x)\frac{1}{2\sqrt{1-x}}$............. $(1)$

$f'(x) = \frac{2}{3}\sqrt{1-x} + \frac{1}{3}\sqrt{1-x}$............. $(0.5)$

$f'(x) = \sqrt{1-x}$

2) Calculer $I_0$

$$\begin{aligned} I_0 &= \int\limits_0^1 \sqrt{1-x}dx \text{............. (0.5)} \\ &= \left[-\frac{2}{3}(1-x)\sqrt{1-x}\right]_0^1 \text{............. (0.5)} \\ &= \frac{2}{3} \text{............. (0.5)} \end{aligned}$$

3) Déterminer une relation entre $I_n$ et $I_{n-1}$ pour $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$

On pose: $k(x) = x^n$ et $h'(x) = \sqrt{1-x}$.......... (0.5)

donc $k'(x) = nx^{n-1}$ et $h(x) = -\frac{2}{3}(1-x)\sqrt{1-x}$.......... (0.5)

1. alors $I_n = k(x) \cdot h(x)|_0^1 - \int_0^1 k'(x) \cdot h(x)\ \mathrm{d}x$............. (0.5)

   c'est à dire $I_n = -\ nx^{n-1} \cdot \frac{2}{3}(1-x)\sqrt{1-x}\Big|_0^1 + \frac{2}{3}n\int_0^1 x^{n-1}(1-x)\sqrt{1-x} \cdot \mathrm{d}x$............. (0.5)

   $= \frac{2}{3}n\int_0^1 x^{n-1}\sqrt{1-x} \cdot \mathrm{d}x - \frac{2}{3}n\int_0^1 x^n\sqrt{1-x} \cdot \mathrm{d}x = \frac{2}{3}n(I_{n-1} - I_n)$ ....... (0.5)

   $\Rightarrow \left(1 + \frac{2}{3}n\right) I_n = \frac{2}{3}nI_{n-1}$............. (0.5)