Université d'Ain Temouchent
Faculté des Sciences et Technologies
Département Maths et Infos

1ère année Tronc commun MI
Année Univ 2022-2023

Examen d'Analyse 2

Durée : 1 h30

Exercice 1. (6 pts)

1. Donner le développement limité d'ordre 3 au voisinage de 0 des fonctions suivantes :

$$f(x) = e^x + \cos(x), \qquad g(x) = \frac{ln(1+x)}{\sin(x)}$$

2. Calculer la

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

Exercice 2. (8 pts)

1. Calculer les primitive suivantes :

$$a) \int (x+1)\ln(x)dx, \qquad b) \int \frac{\cos(x)}{e^{\sin(x)}}dx$$

2. Calculer à l'aide de la somme et l'intégrale de Riemann la limite de U_n avec

$$U_n = \frac{\pi}{2n}\left[\cos\frac{\pi}{2n} + \cos\frac{2\pi}{2n} + \cos\frac{3\pi}{2n} ... + \cos\frac{n\pi}{2n}\right], \quad \forall n \geq 1.$$

3. Justifier les resultats suivants :

$$a) \int_{-1}^{1} x^2 \arctan(x)dx = 0, \quad b) \int_{-2}^{2} x\sin^2(x)dx = 0$$

Exercice 3. (6 pts)

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $(1+x^2)y' + 2xy = 3x^2 + 1$ avec $(y(0) = 3)$
2. $2yy'\sqrt{x} = \sqrt{y^2 - 1}$
3. $y'' - 2y' + 2y = 0$

Mme Mekhalfi

Bon Courage

Corrigé type Examen Analyse 2 . 2023.

EXo1:

1) • $f(x) = e^x + \cos x$

$$= \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) + \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right)$$

2

$$\boxed{f(x) = 2 + x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)}$$

• $g(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{\sin(x)} = \dfrac{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)}{x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)} = \dfrac{1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^3)}{1 - \frac{x^2}{6} + o(x^3)}$

par la division Eulidien on obtient. 3

$$\boxed{g(x) = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2} + o(x^3)}$$

2) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{2 + x + \frac{x^3}{6}}{1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2}} = \boxed{2}$. 1

EXo2:

1) a) $\int (x+1)\ln(x)\,dx =$ ~~$\int x\ln x\,dx + \int \ln x$~~ par partie:

$$\begin{cases} u = \ln x \\ v' = (x+1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u' = \frac{1}{x} \\ v = \frac{1}{2}x^2 + x \end{cases}$$

2

$$\int (x+1)\ln x\,dx = \left(\frac{1}{2}x^2 + x\right)\ln x - \int \left(\frac{1}{2}x + 1\right)dx$$

$$= \boxed{\left(\frac{1}{2}x^2 + x\right)\ln x - \frac{1}{4}x^2 - x + c}$$

b) $\displaystyle\int \frac{\cos x\,dx}{e^{\sin x}}$, par changement de variable:

2

on pose : $u = \sin x \Rightarrow du = \cos x\,dx$.

$$\Rightarrow \int \frac{\cos x\,dx}{e^{\sin x}} = \int \frac{du}{e^u} = \int e^{-u}\,du = -e^{-u} + c = \boxed{-e^{-\sin x} + c}$$

2) $U_n = \dfrac{\pi}{2n}\left[\cos\dfrac{\pi}{2n} + \cdots + \cos\dfrac{n\pi}{2n}\right]$.

$$= \frac{\pi}{2n}\sum_{k=1}^{n} \cos\frac{k\pi}{2n}$$

2

- On considère la fct $g(x) = \cos x$, g est intégrable sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, Donc :

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx = \sin x \Big|_0^{\pi/2} = \boxed{1}.$$

3) a) $\int_{-1}^{1} x^2 \arctan x \, dx = 0$ car la fonction (1)

$x^2 \arctan x$ est impaire. $\begin{cases} x^2 \to \text{paire} \\ \arctan x \to \text{impaire.} \end{cases}$

b) $\int_{-2}^{2} x \sin^2 x \, dx = 0$ car la fonction $x \sin^2 x$ est impaire.

$\begin{cases} x \to \text{impaire.} \\ \sin^2 x \to \text{paire.} \end{cases}$ (1)

Ex 3 :

1) $(1+x^2)y' + 2xy = 3x^2 + 1$, avec $y(0) = 3$.

est une équation diff. linéaire avec second membre (ASM).

- cherchons y_H : $(x^2+1)y' + 2x\,y = 0$ ---(1)

$(1) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-2xy}{x^2+1} \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{-2x\,dx}{x^2+1}$

$\xrightarrow{\text{par integration}} \ln|y| = -\ln(x^2+1) + c.$

$\Rightarrow \ln|y| = \ln \frac{k}{x^2+1}$ avec $k \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow \boxed{y_H = \frac{k}{x^2+1}}$

- cherchons y_p : (variation des constantes).

$y_p = \frac{k(x)}{x^2+1} \Rightarrow y'(x) = \frac{k'(x)}{x^2+1} - \frac{k(x)2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-2x\,k(x)}{(x^2+1)^2} + \frac{3x^2+1}{x^2+1}$

$\Rightarrow k'(x) = 3x^2 + 1 \Rightarrow k(x) = \int (3x^2+1)\,dx$

$\Rightarrow \boxed{k(x) = x^3 + x = x(x^2+1)}.$

$\Rightarrow y_p = \frac{x(x^2+1)}{x^2+1} \Rightarrow \boxed{y_p = x}$

la sol est $y = y_H + y_p \Rightarrow \boxed{y = \frac{k}{x^2+1} + x}$

• on a. $y(0) = 3 \Rightarrow 3 = \frac{k}{0+1} + 0 \Rightarrow \boxed{k = 3}$

8

d'où la sol : $\boxed{y = \frac{3}{x^2+1} + x}$

2) $2yy'\sqrt{x} = \sqrt{y^2-1}$ éq. à variable séparé.

$y' \frac{2y}{\sqrt{y^2-1}} = \frac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} \cdot \frac{2y}{\sqrt{y^2-1}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$

$\Rightarrow \frac{2y\,dy}{\sqrt{y^2-1}} = \frac{dx}{\sqrt{x}}$

8

$\xrightarrow{\text{par intégration}} 2\sqrt{y^2-1} = 2\sqrt{x} + c$

$\Rightarrow y^2 - 1 = (\sqrt{x} + c)^2$

$\Rightarrow \boxed{y = \sqrt{(\sqrt{x}+c)^2 + 1}}$ / $c \in \mathbb{R}$

3) $y'' - 2y' + 2y = 0$ Eq. diff. d'ordre 2.

l'éq. cara : $r^2 - 2r + 2 = 0 \Rightarrow \Delta = -4 = 4i^2 < 0 \Rightarrow \begin{cases} r_1 = 1 - i \\ r_2 = 1 + i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 1 \end{cases}$

9

d'où :

$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$

$\boxed{y = e^{x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)}$ / $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.