Examen d'analyse 2 (Durée 1h30)

Exercice 1(3,5 pts)

1. Soient f et g deux fonctions continues sur un interalle $[a, b]$. Supposons que g est positive sur $[a, b]$. On se propose de montrer que :

$$\exists c \in [a, b]; \quad \int_a^b f(x)g(x)\, dx = f(c) \int_a^b g(x)\, dx. \qquad (1)$$

   (a) Vérifier que si $\int_a^b g(x)\, dx = 0$, alors (1) est vérifiée.

   (b) En utilisant le T.V.I, montrer que (1) est aussi vérifiée dans le cas où $\int_a^b g(x)\, dx > 0$.

2. Application : Calculer $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^2} \int_0^x t \frac{ch(t)}{\sqrt{1+t^2}}\, dt$.

Exercice 2(2,5 pts)

Soit g la fonction définie sur $[0, 2]$ par $g(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq x \leq 1, \\ -2x + 4 & \text{si } 1 < x \leq 2. \end{cases}$

1. g admet-elle une primitive sur $[0, 2]$?
2. g est-elle $R-$intégrable sur $[0, 2]$?

Exercice 3(6 pts)

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 t^n e^{-t}\, dt$.

1. Calculer I_0.
2. Montrer que $\lim_{n \to +\infty} I_n = 0$.
3. Donner une relation de récurrence entre I_{n+1} et I_n.
4. On pose $W_n = \frac{I_n}{n!}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   (a) Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $W_k - W_{k-1} = \frac{-1}{k!e}$.

   (b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $W_n = 1 - \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$.

5. Déduire, de ce qui précède, que $e = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$.

Exercice 4(8 pts)

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = (2x-1)\ln \frac{x^2}{x^2+x+1}$ et $g(x) = (x^2 - x)\ln \frac{x^2}{x^2+x+1}$.

1. (a) Donner le développement limité de $\ln(1+h+h^2)$ au voisinage de 0 à l'ordre 3.

   (b) En déduire les développements limités généralisés au voisinage de $+\infty$ de $f(x)$ à l'ordre 2 et de $g(x)$ à l'ordre 1.

   (c) Déterminer l'asymptote au voisinage de $+\infty$ de $(\mathcal{C}_g)$, la courbe représentative de g et la position de la courbe par rapport à cette asymptote.

2. (a) Montrer que $\int_1^{+\infty} (f(x) + 2)\, dx$ est convergente.

   (b) Donner une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x^2+x+1}$.

   (c) Soit $x > 0$, montrer que

$$\int_1^x f(t)\, dt = g(x) - x + 2\sqrt{3}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + 1 - \frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$$

   (d) En déduire que $\int_1^{+\infty} (f(x) + 2)\, dx = \frac{\pi}{\sqrt{3}} - \frac{1}{2}$.