# Feuille d'exercices n°7 : Calcul matriciel

PTSI B Lycée Eiffel

3 décembre 2013

## Exercice 1 (*)

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

1. Déterminer toutes les matrices $B$ dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $AB = 0$.
2. Déterminer toutes les matrices $C$ dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $AC = CA = 0$.

## Exercice 2 (* à **)

Déterminer toutes les matrices qui commutent avec chacune des matrices suivantes :
$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ ; $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ ; $I_n$ ; $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Déterminer les matrices qui commutent avec toutes les matrices diagonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Déterminer les matrices qui commutent avec toutes les matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

## Exercice 3 (*)

Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que le produit de deux matrices symétriques soit encore symétrique (très peu de calculs nécessaires).

## Exercice 4 (**)

Soient $A$ et $B$ deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $AB - BA = B$. Montrer que, $\forall k \in \mathbb{N}$, $AB^k - B^kA = kB^k$, et en déduire la valeur de $\text{Tr}(B^k)$.

## Exercice 5 (**)

On fixe $A$ et $B$ deux matrices dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Résoudre l'équation $X + \text{Tr}(X)A = B$, où $X$ est une matrice inconnue dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

## Exercice 6 (***)

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer un polynôme de degré 2 annulant la matrice $A$.
2. En déduire que $A$ est inversible et calculer son inverse (sans faire le pivot de Gauss).
3. En utilisant les racines du polynôme trouvé à la question 1, déterminer le reste de la division euclidienne de $X^n$ par ce polynôme, pour un entier $n \geqslant 2$.
4. En déduire la valeur de $A^n$.

## Exercice 7 (**)

On considère dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice $J$ dont tous les coefficients sont égaux à 1. Calculer $J^2$ puis déterminer les puissances de matrice $J$. En déduire, à l'aide de la formule du binôme de Newton, les puissances de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

## Exercice 8 (**)

Déterminer les puissances de la matrice $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$ (au moins deux méthodes possibles).

## Exercice 9 (***)

Soit $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 6 & -2 & -4 \\ -4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $A^3 = 6A - A^2$.
2. Montrer qu'il existe deux suites $a_k$ et $b_k$ telles que $A^k = a_k A^2 + b_k A$ (pour $k \geqslant 2$).
3. Trouver des relations de récurrence pour $a_k$ et $b_k$ et en déduire leurs valeurs.
4. En déduire l'expression de $A^k$. Reste-t-elle valable pour $k = 0$ et pour $k = 1$ ?

## Exercice 10 (*)

Inverser (lorsque c'est possible) les matrices suivantes : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ ; $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ ; $C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ ; $D = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}$ ; $E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ ; $F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

## Exercice 11 (**)

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ -1 & 7 & 2 \\ 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que $P$ est inversible et déterminer son inverse. Calculer $P^{-1}AP$ et en déduire les puissances de la matrice $A$.

## Exercice 12 (**)

Soit $A$ une matrice nilpotente. Montrer que $I - A$ est inversible et que son inverse s'écrit sous la forme $I + A + A^2 + \cdots + A^k$. En déduire l'inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et celui de la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

## Exercice 13 (**)

Déterminer l'inverse de la matrice suivante (matrice carrée à $n$ lignes et $n$ colonnes) :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & & \dots & & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & \dots & & 0 & 1 & 1 \\ 0 & & & \dots & & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

## Exercice 14 (**)

Déterminer l'inverse de la matrice suivante (on peut perdre énormément de temps à appliquer un pivot bête et (très) méchant, on peut aussi chercher des astuces diaboliques à bases de racines sixièmes de l'unité) :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 6 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

## Exercice 15 (**)

Résoudre chacun des systèmes suivants, en distinguant éventuellement des cas suivants les valeurs des paramètres :

- $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & = & 1 \\ -x & - & 3y & + & 5z & = & 2 \\ x & + & y & + & z & = & -1 \end{array}\right.$
- $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & y & + & 3z & = & 1 \\ x & - & y & + & z & = & 2 \\ x & - & 2y & + & 4z & = & 1 \end{array}\right.$
- $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & z & = & 2 \\ 2x & + & y & + & z & = & -1 \\ x & - & 3y & + & 2z & = & -1 \end{array}\right.$
- $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} mx & + & y & + & z & = & 1 \\ x & + & my & + & z & = & m \\ x & + & y & + & mz & = & m^2 \end{array}\right.$
- $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} ax & + & by & + & z & = & 1 \\ x & + & aby & + & z & = & b \\ x & + & by & + & az & = & 1 \end{array}\right.$
- $\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x & - & y & + & 2z & + & 3t & + & w & = & 3 \\ x & + & y & + & 2z & + & 7t & + & 3w & = & 19 \\ -x & + & 4y & - & 5z & + & 12t & - & 4w & = & 33 \\ 2x & - & 4y & + & 5z & + & t & & & = & -12 \\ 4x & - & 3y & + & 4z & + & 11t & + & 9w & = & 15 \end{array}\right.$