Marrakech Le 12/11/2007

Université Cadi Ayyad
Faculté des Sciences Semlalia- Marrakech
Département de Physique

Contrôle N°1 de Mécanique du Point Matériel
Module Physique 1 : Filières SMPC/SMA
Durée 1 heure 30 mn.

Exercice 1 : (3 points)

On considère un point matériel M se déplaçant dans un référentiel R(O, xyz) muni de la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Les coordonnées du point M dans R sont données par :

$x(t) = t + 1$, $y(t) = t^2 + 1$ et $z(t) = 0$, (t étant le temps).

a) Donner l'équation de la trajectoire de M dans R. En déduire sa nature ;

b) Calculer la vitesse $\vec{V}(M/R)$ et l'accélération $\vec{\gamma}(M/R)$ du point M.

Exercice 2 : (5 points)

On considère une courbe (C) sur laquelle se déplace un point matériel M d'abscisse curviligne s(t). La vitesse du point M dans R(O, xyz) est $\vec{V}(M/R)$ de module $V = \frac{ds(t)}{dt}$. On défini la base locale (ou base de Frenet) $(\vec{\tau}, \vec{n}, \vec{b})$ telle que : $\vec{V}(M/R) = V \times \vec{\tau}$.

a) Que désignent les vecteurs $\vec{\tau}, \vec{n}$ et $\vec{b}$.

b) Montrer que l'accélération du point M est donnée par :

$\vec{\gamma}(M/R) = \frac{dV}{dt} \times \vec{\tau} + \frac{V^2}{r} \times \vec{n}$; r étant le rayon de courbure de la trajectoire (C) au point M.

c) Exprimer r en fonction de $\vec{V}(M/R)$ et $\vec{\gamma}(M/R)$.

Exercice 3 : (12 points)

On considère la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ attachée à un référentiel absolu R(O, xyz) et la base $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{k})$ liée à un référentiel relatif $R_1(O_1, x_1y_1z)$. Un point M est assujetti à se déplacer sur une tige (T_1). La tige (T_1) est solidaire en O_1 avec une tige (T) en rotation autour de l'axe (Oz) d'angle $\varphi(t)$, (voir figure). La tige (T_1) est située dans le plan vertical $(\vec{e}_\rho, \vec{k})$. Le point O_1 est repéré par $\overline{OO_1} = \rho(t)\vec{e}_\rho$ et le point M est repéré sur la tige (T_1) par : $\overline{O_1M} = V_o t\,\vec{u}$, ($V_o$ = Cte). Le vecteur $\vec{u}$ fait un angle α constant avec le vecteur $\vec{e}_\rho$.

N.B : __Toutes les expressions vectorielles doivent être exprimées dans la base__ $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{k})$.

I - Etude de la cinématique de M par calcul direct

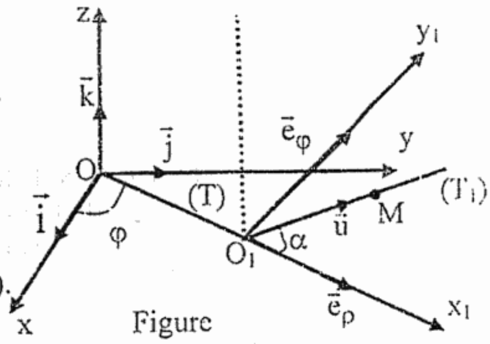
a) Vérifier que la vitesse de rotation $\vec{\Omega}(R_1/R) = \dot{\varphi}\vec{k}$.

b) Exprimer $\vec{u}$ en fonction de $\vec{e}_\rho$, $\vec{k}$ et l'angle α.

c) Donner l'expression du vecteur position $\overline{OM}$.

d) Déterminer la vitesse absolue de M, $\vec{V}(M/R)$.

e) Déterminer l'accélération absolue de M, $\vec{\gamma}(M/R)$.



Figure

II- Etude de la cinématique de M par décomposition de mouvement

a) Déterminer la vitesse relative de M, $\vec{V}(M/R_1)$.

b) Déterminer la vitesse d'entraînement de M, $\vec{V}_e(M)$. .

c) En déduire la vitesse absolue de M, $\vec{V}(M/R)$.

d) Déterminer l'accélération relative de M, $\vec{\gamma}(M/R_1)$.

e) Déterminer l'accélération d'entraînement de M, $\vec{\gamma}_e(M)$.

f) Déterminer l'accélération de Coriolis de M, $\vec{\gamma}_c(M)$.

g) En déduire l'accélération absolue de M, $\vec{\gamma}(M/R)$.

Contrôle N°1 /2007 SMP/SMC/SMA Faculté des science
Mécanique du point Semlalia, Marrakech
Matériel

Corrigé

Exercice 1

Soit un point matériel M de coordonnées $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ données par :

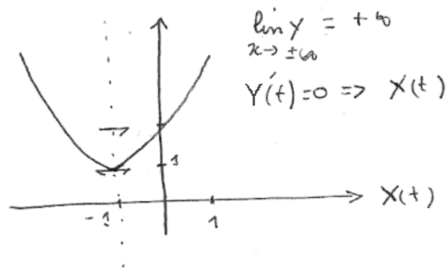
$$x(t) = t + 1 \quad (1)$$
$$y(t) = t^2 + 1 \quad (2)$$
$$z(t) = 0$$

a/ l'équation de la trajectoire de M dans R.

$$(1) \Rightarrow t = x(t) - 1$$

on remplaçons dans (2) $\Rightarrow$ $y(t) = (x(t) - 1)^2 + 1$

→ La trajectoire décrit par le point M est un parabole.



$\lim_{x \to \pm\infty} y = +\infty$

$y'(t) = 0 \Rightarrow x(t) = -1$

b/ calculons : la vitesse $\vec{V}(M/R)$

$$\vec{V}(M/R) = \left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right|_R = \left.\frac{d}{dt}\left((t+1)\vec{i} + (t^2+1)\vec{j}\right)\right|_R$$

$$= 1\vec{i} + 2t\vec{j}$$

$$\boxed{\vec{V}(M/R) = \vec{i} + 2t\vec{j}}$$

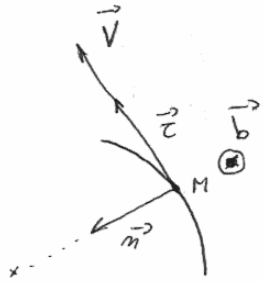
$\vec{i}$ et $\vec{j}$ fixe dans la base $R(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

$\left.\frac{d\vec{i}}{dt}\right|_R = \left.\frac{d\vec{j}}{dt}\right|_R = \left.\frac{d\vec{k}}{dt}\right|_R = \vec{0}$

* l'accélération $\vec{\gamma}(M/R)$

$$\vec{\gamma}(M/R) = \left.\frac{d\vec{V}(M/R)}{dt}\right|_R = \left.\frac{d}{dt}\left(\vec{i} + 2t\vec{j}\right)\right|_R = 2\vec{j}$$

donc $\boxed{\vec{\gamma}(M/R) = 2\vec{j}}$



Exercice 2 :

a/

$\vec{\tau}$: vecteur unitaire tangent en M, elle a la même sens du mouvent

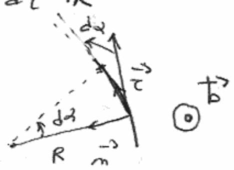
$\vec{n}$: vecteur unitaire $\perp$ à $\vec{\tau}$ dérigé vers le centre de courbure

$\vec{b}$: vecteur unitaire $\perp$ au plans qui contient $\vec{\tau}$ et $\vec{n}$

b/ Montrons $\vec{\gamma}(M/R) = \frac{dV}{dt}\vec{\tau} + \frac{V^2}{R}\vec{n}$ (R rayon de courbure)

on a $\vec{V}(M/R) = V\vec{\tau}$

donc $\vec{\gamma}(M/R) = \left.\frac{d\vec{V}(M/R)}{dt}\right|_R = \left.\frac{dV}{dt}\right|_R \vec{\tau} + V\left.\frac{d\vec{\tau}}{dt}\right|_R$



$\left.\frac{d\vec{\tau}}{dt}\right|_R = \frac{d\vec{\tau}}{ds} \times \left.\frac{ds}{dt}\right|_R$ avec $ds = R\,d\alpha$

$$\frac{d\vec{\tau}}{ds} = \underbrace{\frac{d\vec{\tau}}{d\alpha}}_{\vec{n}} \times \underbrace{\frac{d\alpha}{ds}}_{\frac{1}{R}} = \frac{\vec{n}}{R}$$

$$\text{donc } \vec{\gamma}(M/R) = \frac{dV}{dt}\vec{\tau} + \underbrace{\frac{ds}{dt}}_{V} \times \underbrace{\frac{d\vec{\tau}}{ds}}_{\frac{\vec{n}}{R}} \times \frac{ds}{dt}$$

$$\vec{\gamma}(M/R) = \frac{dV}{dt}\vec{\tau} + \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \frac{\vec{n}}{R}$$

$$\boxed{\vec{\gamma}(M/R) = \frac{dV}{dt}\vec{\tau} + \frac{V^2}{R}\vec{n}}$$

c/ R en fonction de $\vec{V}(M/R)$ et $\vec{\gamma}(M/R)$

on a $\vec{V}(M/R) \wedge \vec{\gamma}(M/R) = \underbrace{\cancel{(V\vec{\tau}) \wedge \left(\frac{dV}{dt}\vec{\tau}\right)}}_{0 \text{ (car } \vec{\tau}\wedge\vec{\tau} = \vec{0})} + \left(V\vec{\tau} \wedge \frac{V^2}{R}\vec{n}\right)$

$= \frac{V^3}{R}\vec{b}$ (avec $\vec{\tau}\wedge\vec{n} = \vec{b}$)

$\|\vec{V}(M/R) \wedge \vec{\gamma}(M/R)\| = \frac{V^3}{R}$ $\qquad \|\vec{b}\| = 1$

$$\Rightarrow \boxed{R = \frac{V^3}{\| \vec{V}(M/R) \wedge \vec{\gamma}(M/R) \|}} \qquad V = \| \vec{V}(M/R) \|$$

Exercice 3 :

$R(O,xyz) \longrightarrow (\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ référentiel absolu

$R_1(O_1,x_1y_1z) \longrightarrow (\vec{e_\rho},\vec{e_\varphi},\vec{k})$ référentiel relatif.

$\overrightarrow{OO_1} = \rho(t)\,\vec{e_\rho}$

$\overrightarrow{O_1M} = V_0 t\,\vec{u}$, $V_0 = ct$

$(\widehat{\vec{u},\vec{e_\rho}}) = \alpha = \omega t$

$$\left.\frac{d\vec{i}}{dt}\right|_R = \left.\frac{d\vec{j}}{dt}\right|_R = \left.\frac{d\vec{k}}{dt}\right|_R = \vec{0} \quad (\vec{i},\vec{j},\vec{k}) \text{ base de } R$$

$$\left.\frac{d\vec{e_\rho}}{dt}\right|_{R_1} = \left.\frac{d\vec{e_\varphi}}{dt}\right|_{R_1} = \left.\frac{d\vec{k}}{dt}\right|_{R_1} = \vec{0} \quad (\vec{e_\rho},\vec{e_\varphi},\vec{k}) \text{ base de } R_1$$

$\Rightarrow$ toutes les expressions vectorielle doivent être exprimées dans $(\vec{e_\rho},\vec{e_\varphi},\vec{k})$

I - Etude de la cinématique de M par calcule direct.

a) La vitesse de rotation $\vec{\Omega}(R_1/R)$

en effet $$\left.\frac{d\vec{e_\rho}}{dt}\right|_R = \left.\frac{d\vec{e_\rho}}{dt}\right|_{R_1} + \vec{\Omega}(R_1/R)\wedge\vec{e_\rho}$$

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_R(\cos\varphi\,\vec{i} + \sin\varphi\,\vec{j}) = 0 + \vec{\Omega}(R_1/R)\wedge\vec{e_\rho}$$

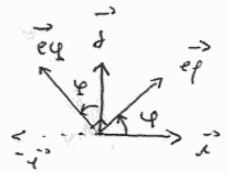
$$\dot\varphi(-\sin\varphi\,\vec{i} + \cos\varphi\,\vec{j}) = \vec{\Omega}(R_1/R)\wedge\vec{e_\rho}$$

$$\dot\varphi\,\vec{e_\varphi} = \vec{\Omega}(R_1/R)\wedge\vec{e_\rho}$$

$$\dot\varphi(\vec{k}\wedge\vec{e_\rho}) = \vec{\Omega}(R_1/R)\wedge\vec{e_\rho}$$

$$\dot\varphi\,\vec{k}\wedge\underline{\vec{e_\rho}} = \vec{\Omega}(R_1/R)\wedge\underline{\vec{e_\rho}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\Omega}(R_1/R) = \dot\varphi\,\vec{k}}$$



$\vec{e_\rho} = \cos\varphi\,\vec{i} + \sin\varphi\,\vec{j}$

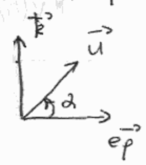
$\vec{e_\varphi} = -\sin\varphi\,\vec{i} + \cos\varphi\,\vec{j}$

$$\left.\frac{d(\cos\varphi)}{dt}\right|_R = \frac{d\cos\varphi}{d\varphi} \times \frac{d\varphi}{dt}$$

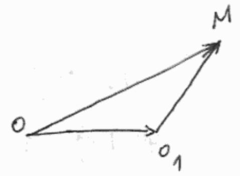
$$= -\sin\varphi \times \dot\varphi$$

b/ l'expression de $\vec{u}$ en fonction de $\vec{e_\rho}$, $\vec{k}$ et α

$$\boxed{\vec{u} = \cos\alpha \, \vec{e_\rho} + \sin\alpha \, \vec{k}}$$



c/ l'expression du $\vec{OM}$



on a $\vec{OM} = \vec{OO_1} + \vec{O_1M}$

$$= \rho(t) \, \vec{e_\rho} + V_0 t \, \vec{u}$$

$$= \rho(t) \, \vec{e_\rho} + V_0 t \left(\cos\alpha \, \vec{e_\rho} + \sin\alpha \, \vec{k} \right)$$

$$\boxed{\vec{OM} = \left(\rho(t) + V_0 t \cos\alpha \right) \vec{e_\rho} + V_0 t \sin\alpha \, \vec{k}}$$

d/ la vitesse absolue de M

$$\vec{V}(M/R) = \left.\frac{d\vec{OM}}{dt}\right|_R = \frac{d}{dt/R}\left(\left(\rho(t) + V_0 t \cos\alpha\right) \vec{e_\rho} + V_0 t \sin\alpha \, \vec{k} \right)$$

avec V_0 et α sont des constantes.
$\vec{k}$ fixe dans $\underline{R}$.

$$\vec{V}(M/R) = \left(\dot{\rho}(t) + V_0 \cos\alpha \right) \vec{e_\rho} + \left(\rho(t) + V_0 t \cos\alpha \right) \left.\frac{d\vec{e_\rho}}{dt}\right|_R + V_0 \sin\alpha \, \vec{k}$$

avec $\left.\frac{d\vec{e_\rho}}{dt}\right|_R = \frac{d\vec{e_\rho}}{d\varphi} \times \frac{d\varphi}{dt} = \vec{e_\varphi} \cdot \dot{\varphi}$

$$\boxed{\vec{V}(M/R) = \left(\rho'(t) + V_0 \cos\alpha \right) \vec{e_\rho} + \left(\rho(t) + V_0 t \cos\alpha \right) \dot{\varphi} \, \vec{e_\varphi} + V_0 \sin\alpha \, \vec{k}}$$

e) L'accélération absolue de M;

$$\vec{\gamma}(M/R) = \left.\frac{d\vec{V}(M/R)}{dt}\right|_R =$$

$$= \frac{d}{dt/R}\Big[\underbrace{(\dot\rho(t)+V_0\cos\alpha)\,\vec{e_\rho}}_{A} + \underbrace{\dot\varphi(\rho(t)+V_0 t\cos\alpha)\,\vec{e_\varphi}}_{B} + \underbrace{V_0\sin\alpha\,\vec{k}}_{C}\Big]$$

$$\left.\frac{dA}{dt}\right|_R = \ddot\rho(t)\,\vec{e_\rho} + [\dot\rho(t)+V_0\cos\alpha]\,\dot\varphi\,\vec{e_\varphi}$$

$$\left.\frac{dB}{dt}\right|_R = \ddot\varphi(\rho(t)+V_0 t\cos\alpha)\,\vec{e_\varphi} + \dot\varphi(\dot\rho(t)+V_0\cos\alpha)\,\vec{e_\varphi}$$

$$+ \dot\varphi(\rho(t)+V_0 t\cos\alpha)\,\dot\varphi(-\vec{e_\rho})$$

$$= \Big[\ddot\varphi(\rho(t)+V_0 t\cos\alpha) + \dot\varphi(\dot\rho(t)+V_0\cos\alpha)\Big]\vec{e_\varphi}$$

$$- \dot\varphi^2\,[\rho(t)+V_0 t\cos\alpha]\,\vec{e_\rho}$$

$$\boxed{\left.\frac{d\vec{e_\varphi}}{dt}\right|_R = \frac{d\vec{e_\varphi}}{d\varphi}\times\frac{d\varphi}{dt} = -\vec{e_\rho}\,\dot\varphi}$$

$$\left.\frac{dC}{dt}\right|_R = \vec{0}$$

$$\vec{\gamma}(M/R) = \begin{pmatrix} \ddot\rho(t) - \dot\varphi^2[\rho(t)+V_0 t\cos\alpha] \\ \ddot\varphi[\rho(t)+V_0 t\cos\alpha] + 2\dot\varphi[\dot\rho(t)+V_0\cos\alpha] \\ 0 \end{pmatrix}_{\vec{e_\rho},\,\vec{e_\varphi},\,\vec{k}}$$

II - Etude de la cinématique de M par décomposition de Mouvement

a/ la vitesse relative de M

$$\vec{V}(M/R_1) = \left.\frac{d(\overrightarrow{O_1M})}{dt}\right|_{R_1} \quad ; \; O_1 \text{ l'origine de } R_1$$

avec $\overrightarrow{O_1M} = V_0 t\,(\cos\alpha\,\vec{e_\rho} + \sin\alpha\,\vec{k})$

$$\left.\frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt}\right|_{R_1} = V_0(\cos\alpha)\,\vec{e_\rho} + V_0\sin\alpha\,\vec{k}$$

$$\boxed{\vec{V}(M/R_1) = V_0 \cos\alpha\, \vec{e_\rho} + V_0 \sin\alpha\, \vec{k}}$$

$(\vec{e_\rho}, \vec{e_\varphi}, \vec{k})$

$\vec{k} \wedge \vec{e_\rho} = \vec{e_\varphi}$

$\vec{k} \wedge \vec{k} = \vec{0}$

b/ vitesse d'entraînement de M, $\vec{V}_e(M)$

$$\vec{V}_e(M) = \left.\frac{d\, \vec{OO_1}}{dt}\right|_R + \vec{\Omega}(R_1/R) \wedge \vec{O_1M}$$

$$= \underbrace{\frac{d}{dt}\Big|_R \left(\rho(t)\, \vec{e_\rho} \right)} + \dot{\varphi}\, \vec{k} \wedge \left(\cos\alpha\, \vec{e_\rho} + \sin\alpha\, \vec{k} \right) V_0 t$$

$$= \dot{\rho}(t)\, \vec{e_\rho} + \rho(t)\, \dot{\varphi}\, \vec{e_\varphi} + \dot{\varphi} V_0 t \cos\alpha\, \vec{e_\varphi}$$

$$\boxed{\vec{V}_e(M) = \dot{\rho}(t)\, \vec{e_\rho} + \dot{\varphi} \left[\rho(t) + V_0 t \cos\alpha \right] \vec{e_\varphi}}$$

c/ la vitesse absolue de M

on a $\vec{V}(M/R) = \vec{V}(M/R_1) + \vec{V}_e(M)$

$$\vec{V}(M/R) = \left(\dot{\rho}(t) + V_0 \cos\alpha \right) \vec{e_\rho} + \dot{\varphi} \left[\rho(t) + V_0 t \cos\alpha \right] \vec{e_\varphi} + V_0 \sin\alpha\, \vec{k}$$

d) L'accélération relative de M

$$\vec{\gamma}(M/R_1) = \left.\frac{d\, \vec{V}(M/R_1)}{dt}\right|_{R_1} = \frac{d}{dt}\Big|_{R_1} \left(V_0 \cos\alpha\, \vec{e_\rho} + V_0 \sin\alpha\, \vec{k} \right)$$

$$= \vec{0} + \vec{0}$$

$\begin{cases} V_0, \sin\alpha \text{ constantes} \\ \vec{k}, \vec{e_\rho} \text{ fixe dans } R_1 \end{cases}$

$$\boxed{\vec{\gamma}(M/R_1) = \vec{0}}$$

e) l'accélération d'entraînement de M

$$\vec{\gamma}_e(M) = \left.\frac{d^2 (\vec{OO_1})}{dt^2}\right|_R + \left.\frac{d\, \vec{\Omega}(R_1/R)}{dt}\right|_R \wedge \vec{O_1M} + \vec{\Omega}(R_1/R) \wedge \left[\vec{\Omega}(R_1/R) \wedge \vec{O_1M} \right]$$

$$* \quad \left.\frac{d(\overrightarrow{OO_1})}{dt}\right|_R = \dot\rho(t)\,\overrightarrow{e\rho} + \rho(t)\dot\varphi\,\overrightarrow{e\varphi} \quad \left(\text{car } \overrightarrow{OO_1} = \rho(t)\,\overrightarrow{e\rho}\right)$$

$$\left.\frac{d^2\overrightarrow{OO_1}}{dt}\right|_R = \ddot\rho(t)\,\overrightarrow{e\rho} + \dot\varphi\dot\rho(t)\,\overrightarrow{e\varphi} + \dot\rho(t)\dot\varphi\,\overrightarrow{e\varphi} + \rho(t)\ddot\varphi\,\overrightarrow{e\varphi} - \rho\dot\varphi\dot\varphi\,\overrightarrow{e\rho}$$

$$= \left[\ddot\rho(t) - \rho(t)\dot\varphi^2\right]\overrightarrow{e\rho} + \left[2\dot\varphi\dot\rho(t) + \rho(t)\ddot\varphi\right]\overrightarrow{e\varphi}$$

$$* \quad \left.\frac{d\vec\Omega(R_1/R)}{dt}\right|_R = \left.\frac{d}{dt}(\dot\varphi\vec k)\right|_R = \ddot\varphi\,\vec k$$

$$* \quad \left.\frac{d\vec\Omega(R_1/R)}{dt}\right|_R \wedge \overrightarrow{O_1M} = (\ddot\varphi\,\vec k)\wedge(V_0 t\cos\alpha\,\overrightarrow{e\rho} + V_0 t\sin\alpha\,\vec k)$$

$$= \ddot\varphi V_0 t\cos\alpha\,\overrightarrow{e\varphi} + \vec 0$$

$$* \quad \vec\Omega(R_1/R)\wedge\left[\vec\Omega(R_1/R)\wedge\overrightarrow{O_1M}\right] = (\dot\varphi\vec k)\wedge\left[(\dot\varphi\vec k)\wedge(V_0 t\cos\alpha\,\overrightarrow{e\rho} + V_0 t\sin\alpha\,\vec k)\right]$$

$$= (\dot\varphi\vec k)\wedge\left[\dot\varphi V_0 t\cos\alpha\,\overrightarrow{e\varphi} + 0\right]$$

$$= -\dot\varphi^2 V_0 t\cos\alpha\,\overrightarrow{e\rho} \quad \left(\vec k\wedge\overrightarrow{e\varphi} = -\overrightarrow{e\rho}\right)$$

$$\boxed{\vec\gamma_e(M) = \left\{\ddot\rho(t) - \dot\varphi^2\left[\rho(t) + V_0 t\cos\alpha\right]\right\}\overrightarrow{e\rho} + \left[\ddot\varphi\left(V_0 t\cos\alpha + \rho(t)\right) + 2\dot\varphi\dot\rho(t)\right]\overrightarrow{e\varphi}}$$

f) l'accélération de coriolis : $\vec\gamma_c(M)$

vitesse relative.

$$\vec\gamma_c(M) = 2\,\vec\Omega(R_1/R)\wedge\vec V(M/R_1)$$

$$= (2\dot\varphi\vec k)\wedge(V_0\cos\alpha\,\overrightarrow{e\rho} + V_0\sin\alpha\,\vec k)$$

$$= 2V_0\cos\alpha\,\dot\varphi\,\overrightarrow{e\varphi} + \vec 0$$

$$\boxed{\vec\gamma_c(M) = 2\dot\varphi V_0\cos\alpha\,\overrightarrow{e\varphi}}$$

g) L'accélération absolue de M

$$\vec{\gamma}(M/R) = \vec{\gamma}(M/R_1) + \vec{\gamma}_e(M) + \vec{\gamma}_c(M)$$

avec
$$\vec{\gamma}(M/R_1) = -\dot{\varphi} V_0 \cos\alpha \, \vec{e_\varphi}$$
$$\vec{\gamma}_c(M) = 2\dot{\varphi} V_0 \cos\alpha \, \vec{e_\varphi}$$
$$\vec{\gamma}_e(M) = \begin{pmatrix} \ddot{\rho}(t) - \dot{\varphi}^2 [\rho(t) + V_0 t \cos\alpha) \\ \ddot{\varphi} [\rho(t) + V_0 t \cos\alpha) + \dot{\varphi} 2 \dot{\rho} \\ 0 \end{pmatrix}$$

donc
$$\vec{\gamma}(M/R) = \begin{pmatrix} \ddot{\rho}(t) - \dot{\varphi}^2 (\rho(t) + V_0 t \cos\alpha) \\ \ddot{\varphi} (\rho(t) + V_0 t \cos\alpha) + 2\dot{\varphi} [\dot{\rho}(t) + V_0 \cos\alpha] \\ 0 \end{pmatrix}_{\vec{e_\rho}, \vec{e_\varphi}, \vec{k}}$$

ham

boukharro

id

Université Cadi Ayyad
Département de Physique
Faculté des Sciences Semlalia
Marrakech

Année Universitaire 08/09

Contrôle 1 : module de physique 1 (SMPC-SMA)
Mécanique – durée 1 h 30 mn

Toutes les bases considérées sont ortho normées directes

Exercice 1

Les coordonnées d'une particule mobile dans le référentiel R_0 (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$) sont données en fonction du temps par : $x(t) = t^2 - 4t+1$ $\quad y(t) = -2t^4$ $\quad z(t) = 3t^2$

Dans un deuxième référentiel R_1 (O_1, $\vec{i}_1 = \vec{i}$, $\vec{j}_1 = \vec{j}$, $\vec{k}_1 = \vec{k}$), elles ont pour expression :

$x_1(t)= t^2 + t + 2$ $\qquad y_1(t)= -2\,t^4+5$ $\qquad z_1(t) = 3t^2 - 7$

1 - Déterminer les expressions des vitesses $\vec{V}(M/R_0)$ et $\vec{V}(M/R_1)$

2 - Exprimer la vitesse $\vec{V}(M/R_O)$ en fonction de la vitesse $\vec{V}(M/R_1)$

3 - Exprimer l'accélération $\vec{\gamma}(M/R_O)$ en fonction de l'accélération $\vec{\gamma}(M/R_1)$

4- Quelle est la nature du mouvement du référentiel R_1 par rapport au référentiel R_0 ?

5 – Supposons R_0 galiléen. R_1 est –il aussi galiléen ? Justifier votre réponse.

Exercice 2

Soient $R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un référentiel fixe et R_1 $(O_1, \vec{i}_1 = \vec{i}, \vec{j}_1 = \vec{j}, \vec{k})$ un référentiel mobile tel que :

$\vec{V}$ $(O_1/R) = a\,t\,\vec{j}$, où a est une constante positive.

Soit $R_2(O_1, \vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{k})$ un deuxième référentiel, lié à une particule mobile M (point matériel) et tels que :

$\overline{O_1M} = l\,\vec{e}_\rho$ où l est une constante positive et l'angle $(\vec{i}_1, \vec{e}_\rho) = \varphi(t)$ (Voir figure).

Toutes les grandeurs vectorielles doivent être exprimées dans la base $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{k})$

A - Considérer $R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ **comme référentiel absolu et** R_1 $(O_1, \vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k})$ **comme référentiel relatif**

1-Quelle est la nature de la trajectoire de M dans R_1 ? (Sans faire de calcul)

2-Déterminer l'expression du vecteur rotation $\vec{\Omega}$ (R_1/R)

3-Déterminer l'expression de la vitesse relative $\vec{V}$ (M/R_1) et de la vitesse d'entraînement $\vec{V}_e(M)$. En déduire la vitesse absolue $\vec{V}(M/R)$.

4-Quelle est la nature du mouvement de R_1 par rapport à R ?

5-Déterminer l'expression des vecteurs accélérations relative $\vec{\gamma}$ (M/R_1), d'entraînement $\vec{\gamma}_e(M)$ et de Coriolis $\vec{\gamma}_c(M)$. En déduire l'accélération absolue $\vec{\gamma}_a(M)$

B - Considérer $R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ **comme référentiel absolu et** $R_2(O_1, \vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{k})$ **comme référentiel relatif**

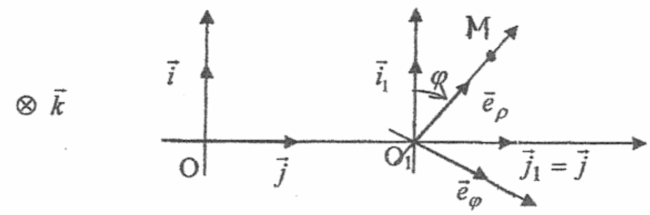
1-Donner l'expression du vecteur rotation $\vec{\Omega}$ (R_2/ R_1). En déduire le vecteur rotation $\vec{\Omega}$ (R_2/ R)

2-Déterminer l'expression de la vitesse relative $\vec{V}$ (M/R_2) et de la vitesse d'entraînement $\vec{V}_e(M)$. En déduire la vitesse absolue $\vec{V}(M/R)$

3- Déterminer l'expression des vecteurs accélérations relative $\vec{\gamma}$ (M/R_2), d'entraînement $\vec{\gamma}_e(M)$ et de Coriolis $\vec{\gamma}_c(M)$. En déduire l'accélération absolue $\vec{\gamma}_a(M)$

4- Comparer les expressions de la vitesse absolue $\vec{V}(M/R)$ déterminées dans les questions A-3 et B-2

5- Comparer les expressions de l'accélération absolue $\vec{\gamma}_a(M)$ déterminées dans les questions A-5 et B-3



Contrôle N°1 /2008 SMP/SMC/SMA Faculté des Science
Mécanique du point Sémlalia, Marrakech.
Matériel

Corrigé

Exercice 1:

Soient $\begin{cases} x(t) = t^2 - 4t + 1 \\ y(t) = -2t^4 \\ z(t) = 3t^2 \end{cases}$; $\begin{cases} x_1(t) = t^2 + t + 2 \\ y_1(t) = -2t^4 + 5 \\ z_1(t) = 3t^2 - 7 \end{cases}$

1/ a- l'expression de la vitesse $\vec{V}(M/R_0)$

$$\vec{V}(M/R_0) = \frac{d}{dt}\Big/_{R_0}\left((t^2-4t+1)\vec{i} - 2t^4\vec{j} + 3t^2\vec{k}\right)$$

$$= (2t-4)\vec{i} - 8t^3\vec{j} + 6t\vec{k}$$

b- l'expression de $\vec{V}(M/R_1)$

$$\vec{V}(M/R_1) = \left.\frac{d\,\vec{O_1M}}{dt}\right|_{R_1} = \frac{d}{dt}\Big/_{R_1}\left((t^2+t+2)\vec{i}\,(-(2t^4+5))\vec{j} + (3t^2-7)\vec{k}\right)$$

$$= (2t+1)\vec{i} - 8t^3\vec{j} + 6t\vec{k}$$

2) $\vec{V}(M/R_0)$ en fonction de la vitesse $\vec{V}(M/R_1)$

on a. $\vec{V}(M/R_0) = (2t-4)\vec{i} - 8t^3\vec{j} + 6t\vec{k}$

$$= (2t+1)\vec{i} - 5\vec{i} - 8t^3\vec{j} + 6t\vec{k}$$

$$\vec{V}(M/R_0) = \vec{V}(M/R_1) - 5\vec{i}$$

3) $\vec{\gamma}(M/R_0)$ en fonction de $\vec{\gamma}(M/R_1)$

$$\vec{\gamma}(M/R_0) = \left.\frac{d\,\vec{V}(M/R_0)}{dt}\right|_{R_0} = \frac{d}{dt}\Big/_{R}\left(\vec{V}(M/R_1) - 5\vec{i}\right)$$

$$\boxed{\vec{\gamma}(M/R_0) = \vec{\gamma}(M/R_1)} = \vec{\gamma}(M/R_1) + \vec{0} \quad \left(\begin{array}{l}\vec{i} = \vec{i_1} \\ \vec{j} = \vec{j_1} \\ \vec{k} = \vec{k_1}\end{array}\right)$$

où bien :

on a $\vec{V}(M/R_0) = (2t - 4)\vec{i} - 8t^3\vec{j} + 6t\vec{k})$

$\vec{V}(M/R_1) = (2t + 1)\vec{i} - 8t^3\vec{j} + 6t\vec{k}$

$\Rightarrow \quad \vec{\gamma}(M/R_0) = \left.\frac{d(\vec{V}/R_0)}{dt}\right|_{R_0} = 2\vec{i} - 24t^2\vec{j} + 6\vec{k}$

$\vec{\gamma}(M/R_1) = \left.\frac{d(\vec{V}(M/R_1))}{dt}\right|_{R_1} = 2\vec{i} - 24t^2\vec{j} + 6\vec{k}$

finalement $\boxed{\vec{\gamma}(M/R_0) = \vec{\gamma}(M/R_1)}$

4 - la nature du mouvement du R_1 par rapport au R_0

- on a $\vec{\Omega}(R_1/R_0) = \vec{0} \Rightarrow$ translation
- $\vec{V}(M/R_0) - \vec{V}(M/R_1) = -5\vec{i} \Rightarrow$ rectiligne.
- $\vec{\gamma}(M/R_0) = \vec{\gamma}(M/R_1) \Rightarrow$ uniforme

$\Rightarrow$ R_1 est en translation rectiligne uniforme.

5) Si R_0 est galiléen alors R_1 est aussi galiléen car R_1 est en translation réctiligne uniforme par rapport à R_0

Exercice 2 :

$R(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ référentiel fixe

$R_1(O_1,\vec{i}_1,\vec{j}_1,\vec{k})$ " mobile

$R_2(O_1,\vec{e\rho},\vec{e\varphi},\vec{k})$, lié à M.

$\vec{V}(O_1/R) = at\vec{j}$

$\overrightarrow{O_1M} = \ell\,\vec{e\rho}$ $\quad \ell > 0$

$(\widehat{\vec{i}_1,\vec{e\rho}}) = \varphi(t)$

A - $R(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ référentiel absolu et $R_1(O_1,\vec{i}_1,\vec{j}_1,\vec{k})$ relatif.

1 - la nature de la trajectoire de M dans $\underline{\underline{R_1}}$

on a ~~ℓ/cst~~ $\|\overrightarrow{O_1M}\| = \ell = cst$

donc dans R_1 la trajectoire de M est circulaire de centre O_1

2 - l'expression du $\vec{\Omega}(R_1/R)$

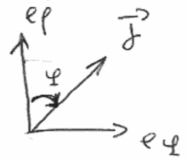
$$\vec{\Omega}(R_1/R) = \vec{0}$$

3 - . vitesse relative $\vec{V}(M/R_1)$

$$\vec{V}(M/R_1) = \left.\frac{d\,\overrightarrow{O_1M}}{dt}\right|_R = \left.\frac{d}{dt}(\ell\,\vec{e\rho})\right|_{R_1}$$

$$= \ell \left.\frac{d\vec{e\rho}}{dt}\right|_{R_1} = \ell \left.\frac{d\vec{e\rho}}{d\varphi}\times\frac{d\varphi}{dt}\right|_R = \ell\dot{\varphi}\,\vec{e\varphi}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{V}(M/R_1) = \ell\dot{\varphi}\,\vec{e\varphi}}$$



* vitesse d'entraînement $\vec{V}_e(M)$

$$\vec{V}_e(M) = \left.\frac{d\,\overrightarrow{OO_1}}{dt}\right|_R + \underbrace{\vec{\Omega}(R_1/R)}_{\vec{0}}\wedge\overrightarrow{O_1M}$$

$$= \vec{V}(O_1/R) = at\vec{j} = at(\sin\varphi\,\vec{e\rho} + \cos\varphi\,\vec{e\varphi})$$

$$\boxed{\vec{V}_e(M) = at(\sin\varphi\,\vec{e\rho} + \cos\varphi\,\vec{e\varphi})}$$

* vitesse absolue $\vec{V}(M/R)$

$$\vec{V}(M/R) = \vec{V}(M/R_1) + \vec{V}_e(M)$$

$$= at\sin\varphi\,\vec{e\rho} + (\rho\dot{\varphi} + at\cos\varphi)\,\vec{e\varphi}$$

4)

on a $\vec{\Omega}(R_1/R) = \vec{0}$ $\Rightarrow$ translation

$\vec{V}(O_1/R) = at\,\vec{j}$ $\Rightarrow$ réctiligne

donc R_1 est en translation réctiligne par rapport à R

5)

* L'accélération relative $\vec{\gamma}(M/R_1)$

$$\vec{\gamma}(M/R_1) = \frac{d}{dt}\vec{V}(M/R_1)\Big|_{R_1} = \frac{d}{dt}\Big|_R(\rho\dot{\varphi}\,\vec{e\varphi})$$

$$= \rho\ddot{\varphi}\,\vec{e\varphi} - \rho\dot{\varphi}^2\,\vec{e\rho}$$

avec $\dfrac{d\vec{e\varphi}}{dt} = \dfrac{d\vec{e\varphi}}{d\varphi}\cdot\dfrac{d\varphi}{dt} = -\vec{e\rho}\cdot\dot{\varphi}$

$$\Rightarrow \vec{\gamma}(M/R_1) = -\rho\dot{\varphi}^2\,\vec{e\rho} + \rho\ddot{\varphi}\,\vec{e\varphi}$$

* L'accélération d'entraînement. $\vec{\gamma}_e(M)$

$$\vec{\gamma}_e(M) = \frac{d\,V(O_1/R)}{dt}\Big|_R + \underbrace{\frac{d\vec{\Omega}(R_1/R)}{dt}\Big|_R}_{0}\wedge\vec{O_1M} + \underbrace{\vec{\Omega}}_{0}\wedge(\vec{\Omega}\wedge\vec{O_1M})$$

$$\Rightarrow \vec{\gamma}(M) = \frac{d}{dt}(at\,\vec{j})\Big|_R = a\vec{j} = a(\sin\varphi\,\vec{e\rho} + \cos\varphi\,\vec{e\varphi})$$

$$\vec{\gamma}(M) = a\sin\varphi\,\vec{e\rho} + a\cos\varphi\,\vec{e\varphi}$$

* L'accélération de coriolis $\gamma_c(M)$

$$\vec{\gamma}_c(M) = 2\underbrace{\vec{\Omega}(R_1/R)}_{0}\wedge\vec{V}(M/R_1) = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \vec{\gamma}_c(M) = \vec{0}$$

* L'accélération absolue $\vec{\gamma}_a(M)$

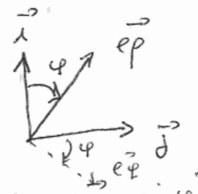
$$\vec{\gamma}_a(M) = \vec{\gamma}(M/R) = \vec{\gamma}(M/R_1) + \vec{\gamma}_e(M) + \vec{\gamma}_c(M)$$

$$= \ell\ddot{\varphi}\,\vec{e_\varphi} - \ell\dot{\varphi}^2\,\vec{e_\rho} + a\sin\varphi\,\vec{e_\rho} + a\cos\varphi\,\vec{e_\varphi}$$

$$\vec{\gamma}_a(M) = (a\sin\varphi - \ell\dot{\varphi}^2)\,\vec{e_\rho} + (\ell\ddot{\varphi} + a\cos\varphi)\,\vec{e_\varphi}$$

B – $R(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ comme référentiel absolu et R_2 comme relatif.

1 – l'expression de la vecteur rotation $\vec{\Omega}(R_2/R_1)$



$$\left.\frac{d\vec{e_\rho}}{dt}\right|_{R_1} = \underbrace{\left.\frac{d\vec{e_\rho}}{dt}\right|_{R_2}}_{=0} + \vec{\Omega}(R_2/R_1)\wedge\vec{e_\rho}$$

$$\left\{\begin{array}{l}\vec{e_\rho} = \cos\varphi\,\vec{i} + \sin\varphi\,\vec{j}\\ \vec{e_\varphi} = -\sin\varphi\,\vec{i} + \cos\varphi\,\vec{j}\end{array}\right.$$

$$\left.\frac{d}{dt}(\cos\varphi\,\vec{i} + \sin\varphi\,\vec{j})\right|_R = \vec{\Omega}(R_2/R_1)\wedge\vec{e_\rho}$$

$$\dot{\varphi}(-\sin\varphi\,\vec{i} + \cos\varphi\,\vec{j}) = \vec{\Omega}(R_2/R_1)\wedge\vec{e_\rho}$$

$$\dot{\varphi}\,\vec{e_\varphi} = \dot{\varphi}(\vec{k}\wedge\vec{e_\rho}) = \vec{\Omega}(R_2/R_1)\wedge\vec{e_\rho}$$

$$\Rightarrow \boxed{\dot{\varphi}\,\vec{k} = \vec{\Omega}(R_2/R_1)}$$

* l'expression de $\vec{\Omega}(R_2/R)$

on a $\vec{\Omega}(R_2/R) = \vec{\Omega}(R_2/R_1) + \vec{\Omega}(R_1/R)$

$$= \dot{\varphi}\,\vec{k} + \vec{0}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\Omega}(R_2/R) = \dot{\varphi}\,\vec{k}}$$

2) * vitesse relative $\vec{V}(M/R_2)$

$$\vec{V}(M/R_2) = \left.\frac{d\vec{O_1M}}{dt}\right|_{R_2} = \left.\frac{d}{dt}(\ell\,\vec{e_\rho})\right|_{R_2} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{V}(M/R_2) = \vec{0}}$$

* vitesse d'entraînement $\vec{V_e}(M)$

on a $\vec{V_e}(M) = \left.\frac{d\,\vec{OO_1}}{dt}\right|_R + \vec{\Omega}(R_2/R) \wedge \vec{O_1M}$

$= at\,\vec{j} + \dot{\varphi}\,\vec{k} \wedge \rho\,\vec{e_\rho}$

$= at(\sin\varphi\,\vec{e_\rho} + \cos\varphi\,\vec{e_\varphi}) + \dot{\varphi}\rho\,\vec{e_\varphi}$

$\Rightarrow \vec{V_e}(M) = at\sin\varphi\,\vec{e_\rho} + (at\cos\varphi + \dot{\varphi}\rho)\,\vec{e_\varphi}$

* vitesse absolue $\vec{V}(M/R)$

$\vec{V}(M/R) = \vec{V}(M/R_2) + \vec{V_e}(M)$

$= 0 + \vec{V_e}(M)$

$$\boxed{\vec{V}(M/R) = at\sin\varphi\,\vec{e_\rho} + (at\cos\varphi + \dot{\varphi}\rho)\,\vec{e_\varphi}}$$

3/ * Accélération relative: $\vec{\gamma}(M/R_2)$

$\vec{\gamma}(M/R_2) = \left.\frac{d\,\vec{V}(M/R_2)}{dt}\right|_{R_2} = \vec{0}$

* Accélération d'entraînement $\vec{\gamma_e}(M)$

$\vec{\gamma_e}(M) = \left.\frac{d^2\,\vec{OO_1}}{dt^2}\right|_R + \left.\frac{d\,\vec{\Omega}(R_2/R)}{dt}\right|_R \wedge \vec{O_1M} + \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{O_1M})$

d'après A-3 $\left.\frac{d^2\,\vec{OO_1}}{dt^2}\right|_R = a(\sin\varphi\,\vec{e_\rho} + \cos\varphi\,\vec{e_\varphi})$

$\left.\frac{d\,\vec{\Omega}(R_2/R)}{dt}\right|_R \wedge \vec{O_1M} = \ddot{\varphi}\,\vec{k} \wedge \rho\,\vec{e_\rho} = \ddot{\varphi}\rho\,\vec{e_\varphi}$

$\vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{O_1M}) = \dot{\varphi}\,\vec{k}\,(\dot{\varphi}\,\vec{k} \wedge \rho\,\vec{e_\rho})$

$= \dot{\varphi}\,\vec{k}\,(\dot{\varphi}\rho\,\vec{e_\varphi})$

$= -\dot{\varphi}^2\rho\,\vec{e_\rho}$

$$\vec{\gamma}_e(M) = (a\sin\varphi - l\dot{\varphi}^2)\,\vec{e_\rho} + (a\cos\varphi + l\ddot{\varphi})\,\vec{e_\varphi}$$

* L'accélération de coriolis. $\vec{\gamma}_c(M)$

$$\vec{\gamma}_c(M) = 2\,\vec{\Omega}(R_2/R) \wedge \underbrace{\vec{V}(M/R_2)}_{\vec{0}} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{\gamma}_c(M) = \vec{0}$$

* L'accélération absolue $\vec{\gamma}_a(M)$

$$\vec{\gamma}_a(M) = \vec{\gamma}(M/R_2) + \vec{\gamma}_e(M) + \vec{\gamma}_c(M)$$

$$= \vec{0} + \vec{\gamma}_e(M) + \vec{0}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\vec{\gamma}_a(M) = \vec{\gamma}_e(M)}$$

4) les expressions des vitesse absolue obtenue en A-3 et B-2 sont identique.

5) les expressions de l'accélération absolue obtenue en A-5 et B-3 sont identique.

hichar

boubhcns

rap n

Université Cadi Ayyad
Faculté des Sciences
Semlalia - Marrakech

Année universitaire 2006-07

Filières : SMPC / SMA
Contrôle C1 : mécanique 1
Durée : 1h 30 mn

Toutes les bases considérées dans les exercices sont orthonormées directes

Exercice 1

Soient R_0 (O X_0 Y_0 Z_0) un référentiel absolu fixe et R (O X Y Z_0) un référentiel relatif en mouvement de rotation de vitesse angulaire $\frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}$ par rapport à R_0 (O X_0 Y_0 Z_0)
Un point M décrit un mouvement circulaire dans R (O X Y Z_0) autour de l'axe OZ_0.
M est repéré par ses coordonnées cylindriques (ρ,φ,z) *(voir figure 1)*.

On pose : ρ = Om = a et z = $\overline{OH}$ = b où a et b sont des constantes.

1-Rappeler les lois de composition des vitesses et des accélérations

2-Déterminer dans la base orthonormée directe $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{k})$:

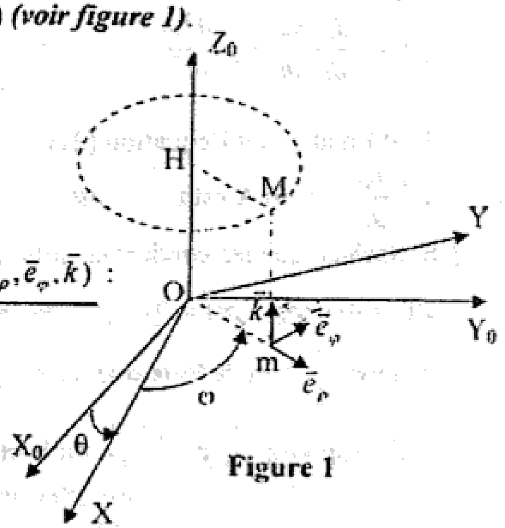


Figure 1

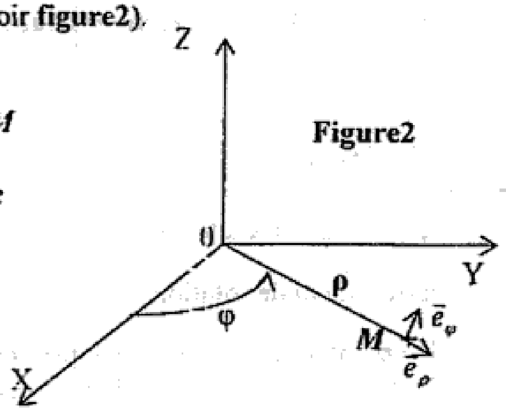
a- le vecteur position $\overline{OM}$
b-le vecteur rotation de R (O X Y Z_0) par rapport à R_0 (O X_0 Y_0 Z_0)
c- le vecteur vitesse relative $\vec{v}_r(M)$
d- le vecteur vitesse d'entraînement $\vec{v}_e(M)$
e- le vecteur vitesse absolue $\vec{v}_a(M)$
f- le vecteur accélération relative $\vec{\gamma}_r(M)$
g- le vecteur accélération d'entraînement $\vec{\gamma}_e(M)$
h- le vecteur accélération de Coriolis $\vec{\gamma}_c(M)$
i- le vecteur accélération absolue $\vec{\gamma}_a(M)$

Tournez la page S.V.P.

Exercice2

Un point matériel M de masse m est en mouvement sans frottement sur le plan horizontal XOY d'un référentiel galiléen R(OXYZ). Un opérateur exerce une force de module F dirigée constamment vers le point O.

M est repéré par ses coordonnées polaires (ρ , φ)) (voir **figure2**).



1-Représenter sur un schéma les forces appliquées à M

2-Appliquer le PFD dans le référentiel R et en déduire les deux équations suivantes :

$$\begin{cases} F = -m(\dfrac{d^2\rho}{dt^2} - \rho\left(\dfrac{d\varphi}{dt}\right)^2) & (1) \\ 0 = 2\dfrac{d\rho}{dt}\dfrac{d\varphi}{dt} + \rho\dfrac{d^2\varphi}{dt^2} & (2) \end{cases}$$

3- a) En utilisant l'équation (2) montrer que

$\rho^2 \dfrac{d\varphi}{dt} = A$ où A est une constante.

b) Sachant que les conditions initiales à l'instant $t = 0$ sont les suivantes :

$\rho(t=0) = \rho_0$, $\dot{\rho}(t=0) = \dot{\rho}_0$, $\varphi(t=0) = \varphi_0$ et $\dot{\varphi}(t=0) = \dot{\varphi}_0$ (le point sur les grandeurs indique $\dfrac{d}{dt}$) en déduire que $A = \rho_0^2 \dot{\varphi}_0$

4- On suppose $\dot{\varphi}_0$ nulle, $\dot{\rho}_0$ nulle et F constant.

a) Etablir l'équation horaire $\rho(t)$ du mouvement du point M

b) Calculer le temps t_1 qu'il faut à M pour arriver au point O.

5- On suppose $\dot{\varphi}_0$ nulle, $\dot{\rho}_0$ non nulle et la force F nulle. Etablir l'équation horaire $\rho(t)$ du mouvement du point M.

contrôle N°1 /2006 SMP / SMC / SMA

Mécanique du point Matériel

Faculté des science Semlalia, Marrakech

Exercice 1 :

$R_0(0, x_0 y_0 z_0)$ référentiel absolu

$R(0, xyz_0)$ référentiel relatif

$$\frac{d\theta}{dt}\Big|_{R_0} = \dot{\theta}$$

$Om = a = ct$

$\overline{OH} = b = ct$

1- les lois de composition des vitesses :

$$\vec{V}(M/R_0) = \vec{V}(M/R) + \vec{V}_e(M)$$

avec $\vec{V}(M/R) = \dfrac{d(\overrightarrow{OM})}{dt}\Big|_R$ O origine de R

$$\vec{V}_e(M) = \frac{d\,\overrightarrow{OO}}{dt}\Big|_R + \vec{\Omega}(R/R_0) \wedge \overrightarrow{OM}$$

* la ~~d~~ composition des accélération :

$$\vec{\gamma}(M/R_0) = \vec{\gamma}(M/R) + \vec{\gamma}_e(M) + \vec{\gamma}_c(M)$$

$$\vec{\gamma}(M/R) = \frac{d\,\overrightarrow{OM}}{dt}\Big|_R$$

$$\vec{\gamma}_e(M) = \frac{d\,\overrightarrow{OO}}{dt}\Big|_{R_0} + \frac{d\,\vec{\Omega}(R/R_0)}{dt}\Big|_R \wedge \overrightarrow{OM}$$

$$+ \vec{\Omega}(R/R_0) \wedge \left(\vec{\Omega}(R/R_0) \wedge \overrightarrow{OM}\right)$$

$$\vec{\gamma}_c(M) = 2\,\vec{\Omega}(R/R_0) \wedge \vec{V}(M/R)$$

2) Déterminons dans la base orthonormée directe $(\vec{e_\rho}, \vec{e_\varphi}, \vec{k})$

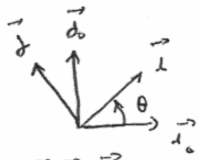
a- le vecteur position $\vec{OM}$

on a $\vec{OM} = \vec{Om} + \vec{mM}$

$$\left| \begin{array}{l} \vec{Om} = \rho\,\vec{e_\rho} = a\,\vec{e_\rho} \\ \vec{mM} = \vec{OH} = b\,\vec{k} \end{array} \right.$$

$$\vec{OM} = a\,\vec{e_\rho} + b\,\vec{k}$$

b- le vecteur rotation $\vec{\Omega}(R/R_0)$



on a $$\left.\frac{d\vec{i}}{dt}\right|_{R_0} = \vec{\Omega}(R/R_0)\wedge\vec{i} + \left.\frac{d\vec{i}}{dt}\right|_{R}$$

$R_0(\vec{i_0}, \vec{j_0}, \vec{k_0})$

$R(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k_0})$

$\vec{i}$: fixe dans R

$$\left.\frac{d\vec{i}}{dt}\right|_{R} = \vec{0} \quad , \quad \vec{i} = \cos\theta\,\vec{i_0} + \sin\theta\,\vec{j_0}$$

$$\frac{d}{dt}(\cos\theta\,\vec{i_0} + \sin\theta\,\vec{j_0}) = \vec{\Omega}(R/R_0)\wedge\vec{i}$$

$$\dot{\theta}(-\sin\theta\,\vec{i_0} + \cos\theta\,\vec{j_0}) = \vec{\Omega}(R/R_0)\wedge\vec{i}$$

$$\dot{\theta}\,\vec{j} = \vec{\Omega}(R/R_0)\wedge\vec{i}$$

$$\dot{\theta}\,(\vec{k}\wedge\underline{\vec{i}}) = \vec{\Omega}(R/R_0)\wedge\underline{\vec{i}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\Omega}(R/R_0) = \dot{\theta}\,\vec{k}}$$

c- le vecteur vitesse relative $\vec{V_r}(M)$

$$\vec{V_r}(M) = \vec{V}(M/R) = \left.\frac{d\,\vec{OM}}{dt}\right|_{R} = \left.\frac{d}{dt}\right|_{R}(a\,\vec{e_\rho} + b\,\vec{k})$$

$$= a\left.\frac{d\vec{e_\rho}}{dt}\right|_{R} + b\,\cancel{\left.\frac{d\vec{k}}{dt}\right|_{R}} \to 0 \quad \vec{k} \text{ fixe dans } R$$

$$= a\,\dot{\varphi}\,\vec{e_\varphi} + \vec{0}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{V_r}(M) = a\,\dot{\varphi}\,\vec{e_\varphi}}$$

d- le vecteur vitesse d'entraînement : $\vec{V}_e(M)$

$$\vec{V}_e(M) = \left.\frac{d\,\vec{OO}}{dt}\right|_{R_0} + \vec{\Omega}(R/R_0) \wedge \vec{OM}$$

$$= \vec{0} + \dot{\theta}\,\vec{k} \wedge (a\,\vec{\varphi} + b\,\vec{k})$$

$$\boxed{\vec{V}_e(M) = \dot{\theta}\,a\,\vec{e\varphi}}$$

$(\vec{k} \wedge \vec{e\rho} = \vec{e\varphi}$

$(\vec{k} \wedge \vec{k} = \vec{0}$

e- le vecteur vitesse absolue $\vec{V}_a(M)$

$$\vec{V}_a(M) = \vec{V}_r(M) + \vec{V}_e(M)$$

$$\vec{V}_a(M) = a\dot{\varphi}\,\vec{e\varphi} + \dot{\theta}\,a\,\vec{e\varphi}$$

$$\boxed{\vec{V}_a(M) = a\,(\dot{\varphi} + \dot{\theta})\,\vec{e\varphi}}$$

f- le vecteur accélération relative $\vec{\gamma}_r(M)$

$$\vec{\gamma}_r(M) = \vec{\gamma}(M/R) = \left.\frac{d\,\vec{V}_r(M)}{dt}\right|_R = \left.\frac{d}{dt}\left(a\dot{\varphi}\,\vec{e\varphi}\right)\right|_R$$

$$= a\ddot{\varphi}\,\vec{e\varphi} - a\dot{\varphi}^2\,\vec{e\rho}$$

$$\vec{\gamma}_r(M) = a\,(-\dot{\varphi}^2\,\vec{e\rho} + \ddot{\varphi}\,\vec{e\varphi})$$

g- le vecteur accélération d'entraînement $\vec{\gamma}_e(M)$

$$\vec{\gamma}_e(M) = \left.\frac{d\,\vec{OO}}{dt}\right|_{R_0} + \left.\frac{d\,\vec{\Omega}(R/R_0)}{dt}\right|_{R_0} \wedge \vec{OM} + \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{OM})$$

$$= \vec{0} + \ddot{\theta}\,\vec{k} \wedge (a\,\vec{e\rho} + b\,\vec{k}) + \dot{\theta}\,\vec{k} \wedge (\dot{\theta}\,\vec{k} \wedge (a\,\vec{e\rho} + b\,\vec{k}))$$

$$= \ddot{\theta}\,a\,\vec{e\varphi} + \dot{\theta}\,\vec{k} \wedge (\dot{\theta}\,a\,\vec{e\varphi})$$

$$\boxed{\vec{\gamma}_e(M) = -\dot{\theta}^2 a\,\vec{e_\rho} + \ddot{\theta} a\,\vec{e_\varphi}}$$

h- vecteur accélération de coriolis $\vec{\gamma}_c(M)$

$$\vec{\gamma}_c(M) = 2\vec{\Omega}(R/R_0) \wedge \vec{V}_r(M)$$

$$= 2(\dot{\theta}\vec{k}) \wedge (a\dot{\varphi}\,\vec{e_\varphi})$$

$$\boxed{\gamma_c(M) = -2a\dot{\theta}\dot{\varphi}\,\vec{e_\rho}}$$

i - le vecteur accélération absolue $\vec{\gamma}_a(M)$.

$$\vec{\gamma}_a(M) = \vec{\gamma}_r(M) + \vec{\gamma}_e(M) + \vec{\gamma}_c(M)$$

$$= a\ddot{\varphi}\,\vec{e_\varphi} - a\dot{\varphi}^2\,\vec{e_\rho} + \ddot{\theta} a\,\vec{e_\varphi} - \dot{\theta}^2 a\,\vec{e_\rho} - 2a\dot{\theta}\dot{\varphi}\,\vec{e_\rho}$$

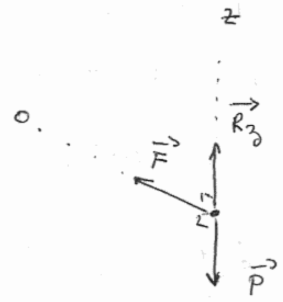
$$= -a(\dot{\varphi}^2 + \dot{\theta}^2 + 2\dot{\theta}\dot{\varphi})\,\vec{e_\rho} + a(\ddot{\varphi} + \ddot{\theta})\,\vec{e_\varphi}$$

$$\boxed{\vec{\gamma}_a(M) = -a(\dot{\varphi} + \dot{\theta})^2\,\vec{e_\rho} + a(\ddot{\varphi} + \ddot{\theta})\,\vec{e_\varphi}}$$

Exercice 2 :

$R(oxyz)$ référentiel galiléen

M en mouvement sans frottement sur (xoy) $\Rightarrow$ $R_\varphi = 0$, $R_\rho = 0$



1/ Représentation : voir shéma

$$\vec{R} = R_z \vec{k}$$
$$\vec{F} = -F \vec{e_\rho}$$
$$\vec{P} = -mg \vec{k}$$

2/ on appliquons le PFD dans le référentiel R :

on a $m\vec{\gamma}(M/R) = \sum \vec{F}_{ext}(M)$

$$m\vec{\gamma}(M/R) = -mg\vec{k} - F\vec{e_\rho} + R_z\vec{k}$$
$$m\vec{\gamma}(M/R) = -F\vec{e_\rho} + (R_z - mg)\vec{k}$$

$$\vec{\gamma}(M/R) = \frac{d\vec{OM}}{dt}\bigg|_R = \frac{d^2}{dt^2}(\rho\vec{e_\rho})\bigg|_R$$

$$\frac{d}{dt}(\rho\vec{e_\rho})\bigg|_R = \frac{d\rho}{dt}\vec{e_\rho} + \rho\frac{d\varphi}{dt}\vec{e_\varphi}$$

$$\frac{d^2}{dt^2}(\rho\vec{e_\rho})\bigg|_R = \frac{d^2\rho}{dt^2}\vec{e_\rho} + \frac{d\rho}{dt}\frac{d\varphi}{dt}\vec{e_\varphi} + \frac{d\rho}{dt}\frac{d\varphi}{dt}\vec{e_\varphi} + \rho\frac{d^2\varphi}{dt^2}\vec{e_\varphi} - \rho\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\vec{e_\rho}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\gamma}(M/R) = \left[\frac{d^2\rho}{dt^2} - \rho\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right]\vec{e_\rho} + \left[2\frac{d\rho}{dt}\frac{d\varphi}{dt} + \rho\frac{d^2\varphi}{dt^2}\right]\vec{e_\varphi}}$$

$$\Rightarrow m\left[\frac{d^2\rho}{dt^2} - \rho\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right]\vec{e_\rho} + m\left[2\frac{d\rho}{dt}\cdot\frac{d\varphi}{dt} + \rho\frac{d^2\varphi}{dt^2}\right]\vec{e_\varphi} = -F\vec{e_\rho} + (R_3 - mg)\vec{k}$$

* la projection de l'equation par $\vec{e_\rho}$

$$\vec{e_\rho}\cdot m\vec{\gamma}(M/R) = \vec{e_\rho}\cdot\left(-F\vec{e_\rho} + (R_3 - mg)k\right)$$

$$\Rightarrow m\left[\frac{d^2\rho}{dt^2} - \rho\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right] = -F$$

$$\Rightarrow \quad F = -m\left(\frac{d^2\rho}{dt^2} - \rho\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right) \quad (1)$$

* la projection sur $\vec{e_\varphi}$

$$\vec{e_\varphi}\cdot m\vec{\gamma}(M/R) = \vec{e_\varphi}\cdot\left(-F\vec{e_\rho} + (R_3 - mg)k\right)$$

$$m\left(2\frac{d\rho}{dt}\cdot\frac{d\varphi}{dt} + \rho\frac{d^2\varphi}{dt^2}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad 0 = 2\frac{d\rho}{dt}\frac{d\varphi}{dt} + \rho\frac{d^2\varphi}{dt^2} \quad (2)$$

(3) -

a- Montrons $\rho^2\frac{d\varphi}{dt} = A$

on a $$2\frac{d\rho}{dt}\frac{d\varphi}{dt} + \rho\frac{d^2\varphi}{dt^2} = 0$$

$$2\rho\frac{d\rho}{dt}\frac{d\varphi}{dt} = -\rho^2\frac{d^2\varphi}{dt^2}$$

$$\underbrace{2\rho\frac{d\rho}{dt}}\frac{d\varphi}{dt} + \rho^2\frac{d^2\varphi}{dt^2} = 0$$

$$\underbrace{\frac{d}{dt}(\rho^2)}_{f}\cdot\underbrace{\frac{d\varphi}{dt}}_{g} + \rho^2\frac{d}{dt}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right) = 0$$

$$\dot{f}g + f\cdot\dot{g}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\rho^2\frac{d\varphi}{dt}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\rho^2 \frac{d\varphi}{dt} = A}$$

<u>d'autre méthode :</u>

$$\frac{d}{dt}(\rho^2) = 2\rho \frac{d\rho}{dt}$$

on a $\rho^2 \frac{d\varphi}{dt} = A$

$$\frac{d}{dt}\left(\rho^2 \frac{d\varphi}{dt}\right) = \frac{d}{dt} A$$

A . constante .

$$2\rho \cdot \frac{d\rho}{dt}\frac{d\varphi}{dt} + \rho^2 \frac{d^2\varphi}{dt^2} = 0$$

$$2 \cdot \frac{d\rho}{dt}\frac{d\varphi}{dt} + \rho \frac{d^2\varphi}{dt^2} = 0$$

b) en déduire A

on a $\rho^2 \frac{d\varphi}{dt} = A \Rightarrow \rho^2 \dot{\varphi} = A$

pour $t = 0 \Rightarrow \rho^2(t=0) = \dot{\varphi}(t=0) = A$

$$\Rightarrow \quad \boxed{A = \rho_0^2 \dot{\varphi}_0}$$

4) $\dot{\varphi}_0 = \dot{\rho}_0 = 0$ et $F = cst$

a- on a $\rho^2 \frac{d\varphi}{dt} = A = \rho_0^2 \dot{\varphi}_0 = 0$

$$\Rightarrow \rho^2 = 0 \text{ où } \frac{d\varphi}{dt} = 0 \quad \text{ave } \rho(t) \neq 0$$

on remplace $\frac{d\varphi}{dt} = 0$ dans (1) on trouve

$$F = -m \frac{d^2\rho(t)}{dt^2}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2\rho(t)}{dt} = -\frac{F}{m} \quad \text{avec } F = cst$$

$$\frac{d\rho(t)}{dt} = \frac{-F}{m} \cdot t + C_1 \quad \left(\text{si } t = 0 \ \ \dot{\rho}(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0\right)$$

$$\Rightarrow \rho(t) = \frac{-F}{2m} t^2 + C_2$$