Université Sultane Moulay Slimane

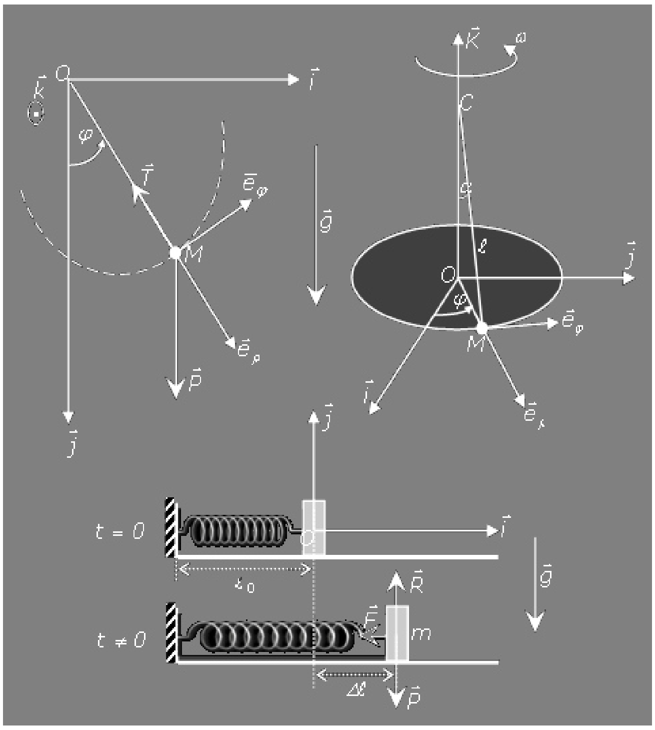
Faculté Polydisciplinaire

Béni Méllal

FILIÈRE :SMP/SMC/SMA

MODULE : M1/M1/M4

Examens corrigés
Mécanique du Point Matériel



Préparé par Mohamed LAMSAADI

Année universitaire 2012-2016

Examen 1 (Session ordinaire) (durée 2h)

Exercice 1 : *(8 Ppoints)*

On considère un point *M* en mouvement dans le plan $(O,\vec{i},\vec{j})$ d'un repère orthonormé direct $\Re(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. Le point *M* est repéré par ses coordonnées polaires suivantes :

$\rho = \frac{1}{2}[1+cos(\varphi)]$ où $0 \le \varphi \le \pi$ et $\dot{\varphi} > 0$. On désigne par $(\vec{e}_\rho,\vec{e}_\varphi)$ la base polaire.

1) Quelle est l'allure de la trajectoire de *M* ?

2) Montrer que le vecteur vitesse de M dans $\Re$ peut s'écrire dans la base $(\vec{e}_\rho,\vec{e}_\varphi)$ sous la forme: $\vec{v}(M/\Re) = \dot{\varphi}\,cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\left[-sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\vec{e}_\rho + cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\vec{e}_\varphi\right]$

3) Déduire $\|\vec{v}(M/\Re)\|$ le module du vecteur vitesse $\vec{v}(M/\Re)$.

4) En déduire $\vec{\tau}$ le vecteur unitaire tangent à la trajectoire dans la base $(\vec{e}_\rho,\vec{e}_\varphi)$.

5) Exprimer da la base $(\vec{e}_\rho,\vec{e}_\varphi)$, les accélérations tangentielle, $\vec{\gamma}_t$, et normale, $\vec{\gamma}_n$, de *M.*

6) En déduire le rayon de courbure R_c de la trajectoire ainsi que le vecteur unitaire normal $\vec{n}$.

7) Exprimer, en fonction de φ, l'abscisse curviligne *s* de *M*, comptée à partir du point correspondant à $\varphi = 0$. On donne $s(\varphi = 0) = 0$.

8) En déduire la longueur totale de la trajectoire décrite par *M*.

Exercice 2 : *(12 Ppoints)*

Un point matériel *M* de masse *m* est suspendu à un fil inextensible de longueur *L*. L'autre extrémité O_1 du fil se déplace horizontalement le long de l'axe $(O\vec{j})$ d'un repère O.N.D $\Re(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ fixe tel que $\overrightarrow{OO_1} = \frac{a}{2}t^2\vec{j}$ (*a* est une constante). Soit $\Re_1(O_1,\vec{i}_1,\vec{j}_1,\vec{k})$ un repère O.N.D tel que $\vec{i} = \vec{i}_1$ et $\vec{j} = \vec{j}_1$. On supposera que le fil reste tendu en mouvement, le système oscille en permanence autour de l'axe $(O_1\vec{k})$ et que les frottements sont négligeables.

1) Exprimer dans la base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, les vecteurs vitesse et accélération de *M* par rapport à $\Re$.

2) Exprimer dans la base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, le vecteur moment cinétique de *M* en O_1 par rapport à $\Re$.

3) En appliquant le théorème du moment cinétique dans $\Re$ par rapport au point O_1, déterminer l'équation différentielle du mouvement de *M* vérifiée par φ.

4) En appliquant le principe fondamentale de la dynamique par rapport au repère $\Re$, déterminer l'intensité *T* de la tension exercée par le fil sur *M*.

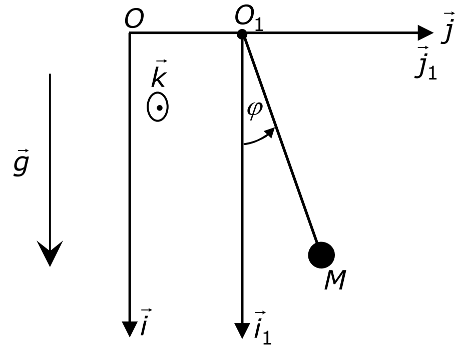
5) Le repère $\Re_1$ est-t-il galiléen ? Justifier votre réponse.

6) Exprimer dans la base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, les forces d'inertie.

7) Déterminer en fonction de φ, l'énergie potentielle de *M* par rapport au repère $\Re_1$.

8) Déterminer l'énergie cinétique de *M* par rapport au repère $\Re_1$.

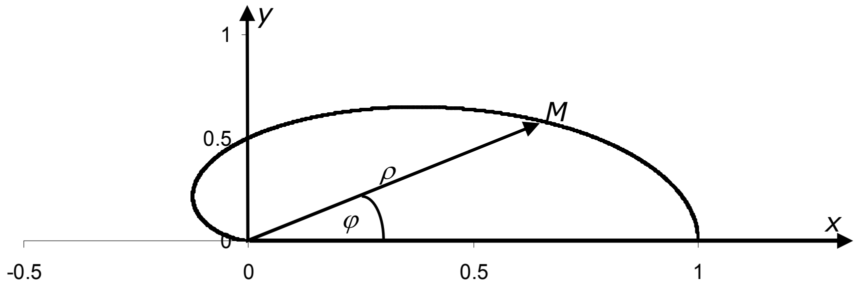
9) En appliquant le théorème de l'énergie mécanique dans le repère $\Re_1$, retrouver l'équation différentielle du mouvement de *M*.



Correction d'examen 1 (session ordinaire)

Exercice 1:

1)



2) $\overrightarrow{OM} = \rho\vec{e}_\rho \rightarrow \overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(1+\cos\varphi)\vec{e}_\rho$, $\vec{v}(M/\Re) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt/\Re} = -\frac{1}{2}\dot{\varphi}\sin(\varphi)\vec{e}_\rho + \frac{1}{2}\dot{\varphi}(1+\cos\varphi)\vec{e}_\varphi$

$\sin(\varphi) = 2\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)$, $1+\cos(\varphi) = 2\cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) \Rightarrow \vec{v}(M/\Re) = \dot{\varphi}\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\left[-\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\vec{e}_\rho + \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\vec{e}_\varphi\right]$

3) $\|\vec{v}(M/\Re)\| = \left|\dot{\varphi}\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right| \left\|\left[-\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\vec{e}_\rho + \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\vec{e}_\varphi\right]\right\|$

$0 \le \varphi \le \pi$ et $\dot{\varphi} > 0 \rightarrow \left|\dot{\varphi}\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right| = \dot{\varphi}\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \Rightarrow \|\vec{v}(M/\Re)\| = \dot{\varphi}\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)$

4) $\vec{\tau} = \frac{\vec{v}(M/\Re)}{\|\vec{v}(M/\Re)\|} = \frac{\dot{\varphi}\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\left[-\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\vec{e}_\rho + \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\vec{e}_\varphi\right]}{\dot{\varphi}\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)} \Rightarrow \vec{\tau} = -\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\vec{e}_\rho + \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\vec{e}_\varphi$

5) $\vec{\gamma}_t = \frac{d\left(\|\vec{v}(M/\Re)\|\right)}{dt}\vec{\tau}$, $\frac{d\left(\|\vec{v}(M/\Re)\|\right)}{dt} = \ddot{\varphi}\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) - \frac{\dot{\varphi}^2}{2}\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)$

$$\Rightarrow \vec{\gamma}_t = \left[\ddot{\varphi}\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) - \frac{\dot{\varphi}^2}{2}\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right]\left[-\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\vec{e}_\rho + \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\vec{e}_\varphi\right]$$

$\vec{\gamma}_n = \|\vec{v}(M/\Re)\|\frac{d\vec{\tau}}{dt/\Re}$, $\frac{d\vec{\tau}}{dt/\Re} = -\frac{\dot{\varphi}}{2}\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\vec{e}_\rho - \dot{\varphi}\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\vec{e}_\varphi - \frac{\dot{\varphi}}{2}\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\vec{e}_\varphi - \dot{\varphi}\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\vec{e}_\rho$

$$= -\frac{3\dot{\varphi}}{2}\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\vec{e}_\rho - \frac{3\dot{\varphi}}{2}\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\vec{e}_\varphi$$

$\rightarrow \vec{\gamma}_n = \dot{\varphi}\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\left[-\frac{3\dot{\varphi}}{2}\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\vec{e}_\rho - \frac{3\dot{\varphi}}{2}\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\vec{e}_\varphi\right] \Rightarrow \vec{\gamma}_n = -\frac{3\dot{\varphi}^2}{2}\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\left[\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\vec{e}_\rho + \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\vec{e}_\varphi\right]$

6) $\vec{\gamma}_n = \frac{\|\vec{v}(M/\Re)\|^2}{R_c}\vec{n} \rightarrow \|\vec{\gamma}_n\| = \frac{\|\vec{v}(M/\Re)\|^2}{R_c}\|\vec{n}\| \rightarrow \frac{3\dot{\varphi}^2}{2}\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \frac{\dot{\varphi}^2\cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{R_c} \Rightarrow R_C = \frac{2}{3}\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)$

$$\vec{\gamma}_n = \frac{\|\vec{v}(M/\Re)\|^2}{R_c}\vec{n} = \frac{\dot{\varphi}^2\cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{\frac{2}{3}\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)}\vec{n} = \frac{3}{2}\dot{\varphi}^2\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\vec{n} = -\frac{3\dot{\varphi}^2}{2}\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\left[\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\vec{e}_\rho + \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\vec{e}_\varphi\right]$$

$$\Rightarrow \vec{n} = -\left[\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\vec{e}_\rho + \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\vec{e}_\varphi\right]$$

7) $\frac{ds}{dt} = \|\vec{v}(M/\Re)\| = \dot{\varphi}\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \rightarrow ds = \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)d\varphi \rightarrow s = 2\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) + cte$

$s(\varphi = 0) = 0 \rightarrow cte = 0 \Rightarrow s = 2\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)$

8) La longueur totale de la trajectoire décrite par M : $L = s(\varphi = \pi) \Rightarrow L = 2m$ ($[\varphi] = rad, [\rho] = m$).

Exercice 2:

1) $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO_1} + \overrightarrow{O_1M} = \dfrac{at^2}{2}\vec{j} + L\vec{e}_\rho \rightarrow \overrightarrow{OM} = \dfrac{at^2}{2}\vec{j} + L\cos(\varphi)\vec{i} + L\sin(\varphi)\vec{j}$

$\vec{v}(M/\Re) = \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt/\Re} = at\,\vec{j} - L\dot{\varphi}\sin(\varphi)\vec{i} + L\dot{\varphi}\cos(\varphi)\vec{j} \quad \Rightarrow \quad \vec{v}(M/\Re) = -L\dot{\varphi}\sin(\varphi)\vec{i} + [at + L\dot{\varphi}\cos(\varphi)]\vec{j}$

$\vec{\gamma}(M/\Re) = \dfrac{d\vec{v}(M/\Re)}{dt/\Re} \quad \Rightarrow \quad \vec{\gamma}(M/\Re) = -[L\ddot{\varphi}\sin(\varphi) + L\dot{\varphi}^2\cos(\varphi)]\vec{i} + [a + L\ddot{\varphi}\cos(\varphi) - L\dot{\varphi}^2\sin(\varphi)]\vec{j}$

2) $\vec{\sigma}_{O_1}(M/\Re) = \overrightarrow{O_1M} \wedge m\vec{v}(M/\Re) = [L\cos(\varphi)\vec{i} + L\sin(\varphi)\vec{j}] \wedge m[-L\dot{\varphi}\sin(\varphi)\vec{i} + [at + L\dot{\varphi}\cos(\varphi)]\vec{j}]$

$\rightarrow \vec{\sigma}_{O_1}(M/\Re) = m[L^2\dot{\varphi}\sin^2(\varphi) + Lat\cos(\varphi) + L^2\dot{\varphi}\cos^2(\varphi)]\vec{k} \quad \Rightarrow \quad \vec{\sigma}_{O_1}(M/\Re) = m[L^2\dot{\varphi} + Lat\cos(\varphi)]\vec{k}$

3) $\dfrac{d\vec{\sigma}_{O_1}(M/\Re)}{dt/\Re} = \vec{m}_{O_1}\left(\sum \vec{F}_{ext}\right) + m\vec{v}(M/\Re) \wedge \vec{v}(O_1/\Re)$

- $\dfrac{d\vec{\sigma}_{O_1}(M/\Re)}{dt/\Re} = m[L^2\ddot{\varphi} + La\cos(\varphi) - Lat\dot{\varphi}\sin(\varphi)]\vec{k}$

- $\sum \vec{F}_{ext} = \vec{P} + \vec{T} = mg\vec{i} - T\cos(\varphi)\vec{i} - T\sin(\varphi)\vec{j} \Rightarrow \sum \vec{F}_{ext} = [mg - T\cos(\varphi)]\vec{i} - T\sin(\varphi)\vec{j}$

$\vec{m}_{O_1}\left(\sum \vec{F}_{ext}\right) = \overrightarrow{O_1M} \wedge \sum \vec{F}_{ext} = [L\cos(\varphi)\vec{i} + L\sin(\varphi)\vec{j}] \wedge [[mg - T\cos(\varphi)]\vec{i} - T\sin(\varphi)\vec{j}]$

$\Rightarrow \vec{m}_{O_1}\left(\sum \vec{F}_{ext}\right) = [-mgL\sin(\varphi) + TL\sin(\varphi)\cos(\varphi) - TL\cos(\varphi)\sin(\varphi)]\vec{k} \Rightarrow \vec{m}_{O_1}\left(\sum \vec{F}_{ext}\right) = -mgL\sin(\varphi)\vec{k}$

- $m\vec{v}(M/\Re) \wedge \vec{v}(O_1/\Re) = [-Lm\dot{\varphi}\sin(\varphi)\vec{i} + [atm + Lm\dot{\varphi}\cos(\varphi)]\vec{j}] \wedge at\vec{j}$

$\Rightarrow \quad m\vec{v}(M/\Re) \wedge \vec{v}(O_1/\Re) = -Lm\dot{\varphi}at\sin(\varphi)\vec{k}$

$\rightarrow m[L^2\ddot{\varphi} + La\cos(\varphi) - Lat\dot{\varphi}\sin(\varphi)]\vec{k} = -mgL\sin(\varphi)\vec{k} - L\dot{\varphi}atm\sin(\varphi)\vec{k}$

$mL^2\ddot{\varphi} + mLa\cos(\varphi) + mgL\sin(\varphi) = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{\varphi} + \dfrac{a}{L}\cos(\varphi) + \dfrac{g}{L}\sin(\varphi) = 0$: Equation différentielle

4) $\sum \vec{F}_{ext} = \vec{P} + \vec{T} = m\vec{\gamma}(M/\Re)$

$\rightarrow \quad [mg - T\cos(\varphi)]\vec{i} - T\sin(\varphi)\vec{j} = -m[L\ddot{\varphi}\sin(\varphi) + L\dot{\varphi}^2\cos(\varphi)]\vec{i} + m[a + L\ddot{\varphi}\cos(\varphi) - L\dot{\varphi}^2\sin(\varphi)]\vec{j}$

$\rightarrow \begin{cases} -T\cos(\varphi) = -Lm\ddot{\varphi}\sin(\varphi) - Lm\dot{\varphi}^2\cos(\varphi) - mg \\ -T\sin(\varphi) = am + Lm\ddot{\varphi}\cos(\varphi) - Lm\dot{\varphi}^2\sin(\varphi) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad T = Lm\dot{\varphi}^2 + mg\cos(\varphi) - am\sin(\varphi)$

5) $\vec{v}(O_{1/\Re}) = at\vec{j} \rightarrow \|\vec{v}(O_{1/\Re})\| = |at| \neq cte \rightarrow \Re_1$ est en mouvement de translation par rapport à $\Re$. $\Rightarrow$ Le repère $\Re_1$ est non galiléen.

6) $\Omega(\Re_1/\Re) = \vec{0} \rightarrow \vec{\gamma}_e = \vec{\gamma}(O_1/\Re) = a\vec{j}$ et $\vec{\gamma}_c = \vec{0} \Rightarrow \vec{f}_e = -ma\vec{j}$ et $\vec{f}_c = \vec{0}$

7) $\overrightarrow{rot}(\vec{f}_e) = \vec{0} \rightarrow \vec{f}_e$ dérive d'une énergie potentielle E_{Pe}

$dE_{Pe} = -\vec{f}_e d\overrightarrow{O_1M} = mady_1 \rightarrow E_{Pe} = may_1 + cte$

$\vec{P}$ est conservative $\rightarrow dE_{Pg} = -\vec{P}d\overrightarrow{O_1M} = -mgdx_1 \rightarrow E_{Pg} = -mgx_1 + cte$

$\rightarrow E_p(M/\Re) = E_{pe} + E_{pg} = may_1 - mgx_1 + cte$

$x_1 = L\cos(\varphi)$ et $y_1 = L\sin(\varphi) \quad \Rightarrow \quad E_p(M/\Re) = maL\sin(\varphi) - mgL\cos(\varphi) + cte$

8) $E_c(M/\Re_1) = \dfrac{1}{2}m\vec{v}(M/\Re_1) \Rightarrow E_c(M/\Re_1) = \dfrac{1}{2}mL^2\dot{\varphi}^2$

9) $\Re_1$ est non galiléen $\rightarrow \dfrac{dE_m(M/\Re_1)}{dt} = P(\vec{F}_{nc}/\Re_1)$

$E_m(M/\Re_1) = \dfrac{1}{2}mL^2\dot{\varphi}^2 + maL\sin(\varphi) - mgL\cos(\varphi) + cte$

$\rightarrow \dfrac{dE_m(M/\Re_1)}{dt} = mL^2\dot{\varphi}\ddot{\varphi} + maL\dot{\varphi}\cos(\varphi) + mgL\dot{\varphi}\sin(\varphi), \qquad P(\vec{F}_{nc}/\Re_1) = (\vec{T}/\Re_1) = 0$

$\rightarrow mL^2\dot{\varphi}\ddot{\varphi} + maL\dot{\varphi}\cos(\varphi) + mgL\dot{\varphi}\sin(\varphi) = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{\varphi} + \dfrac{a}{L}\cos(\varphi) + \dfrac{g}{L}\sin(\varphi) = 0$

Examen 2 (Session rattrapage) (durée 2h)

Exercice 1 :(6 *Points*)

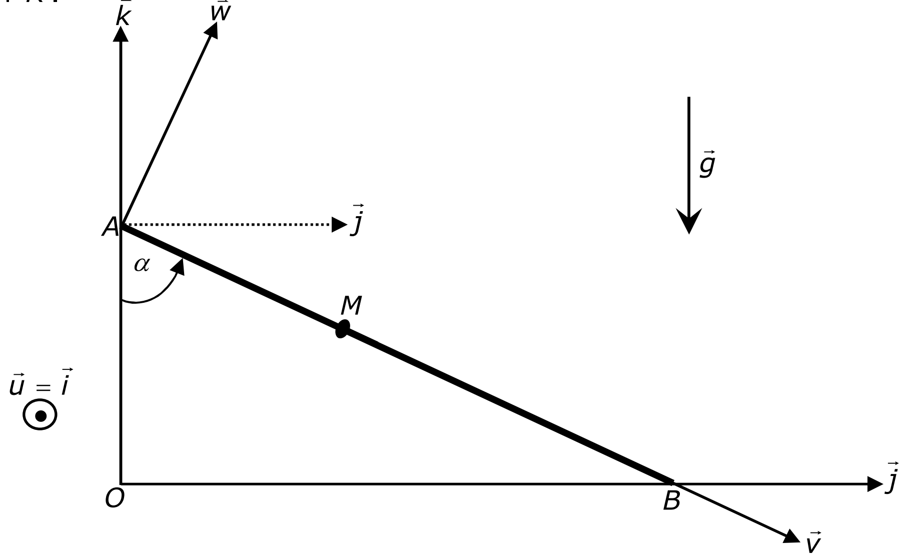
On considère un point *M* en mouvement dans le plan $(O,\vec{i},\vec{j})$ d'un repère orthonormé direct $\Re(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. Le vecteur positon de *M* est donné par: $\overrightarrow{OM} = (2t+2)\vec{i} + \left(\dfrac{t^2}{2} + t + \dfrac{1}{2}\right)\vec{j}$.

1) Déterminer l'équation caractéristique de la trajectoire de *M*. Quelle est sa nature ?
2) Calculer les vecteurs vitesse et accélération de *M* par rapport à $\Re$.
3) Exprimer les normes des accélérations tangentielle, $\|\vec{\gamma}_t\|$, et normale, $\|\vec{\gamma}_n\|$, de *M.*
4) En déduire le rayon de courbure R_c de la trajectoire en *M*.

Exercice 2 : (14 *Points*)

On considère le repère fixe $\Re(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ (repère absolu), $(O,\vec{j},\vec{k})$ étant le plan vertical. Soit une tige (*AB*) de longueur ℓ, en mouvement par rapport à $\Re$ de telle façon que le point *A* se déplace sur l'axe vertical $(O\vec{k})$ et le point *B* se déplace sur l'axe horizontal $(O\vec{j})$. Soit $\Re_1(A,\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ (repère relatif) un repère orthonormé direct lié à la barre tel que $\vec{v} = \overrightarrow{AB}/\|\overrightarrow{AB}\|$, $\vec{u} = \vec{i}$ et $\vec{w} = \vec{u}\wedge\vec{v}$. On pose $\alpha = \omega t$ (ω est une constante positive) l'angle entre les axes (*AO*) et (*AB*) comme le montre la Figure ci-dessous. Un anneau *M* de masse *m* (assimilé à un point matériel) se meut sans frottement le long de la tige (*AB*) tel que $\overrightarrow{AM} = r(t)\vec{v}$.

1) Exprimer dans la base $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$, les vecteurs $\vec{j}$ et $\vec{k}$.
2) Exprimer dans la base $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$, le vecteur de rotation de $\Re_1$ par rapport à $\Re$.
3) Exprimer dans la base $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$, les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OM}$.
4) Exprimer dans la base $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$, les vecteurs vitesses relative et d'entrainement de *M*.
5) Exprimer dans la base $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$, les vecteurs accélérations relative, d'entrainement et de Coriolis de *M*.
6) Exprimer dans la base $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$, le poids de *M* et les forces d'inertie.
7) En appliquant le principe fondamental de la dynamique par rapport à $\Re_1$, déterminer l'équation différentielle du mouvement de *M* et exprimer dans la base $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$, la réaction $\vec{R}$ exercée par la tige sur le point *M*.
8) En appliquant le théorème de l'énergie cinétique par rapport à $\Re_1$, retrouver l'équation différentielle du mouvement de *M*.
9) Exprimer dans la base $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$, le vecteur moment cinétique de *M* en *A* par rapport à $\Re$.
10) En appliquant le théorème du moment cinétique dans $\Re$ par rapport au point *A*, retrouver l'expression de la réaction $\vec{R}$.



Correction d'examen 2 (session rattrapage)

Exercice 1:

1) $\overrightarrow{OM} = (2t+2)\vec{i} + \left(\frac{t^2}{2} + t + \frac{1}{2}\right)\vec{j} \rightarrow x = 2t+2\,,\ y = \frac{t^2}{2} + t + \frac{1}{2}$

$\rightarrow t+1 = \frac{x}{2}\,,\ y = \frac{1}{2}\left(t^2 + 2t + 1\right) = \frac{1}{2}(t+1)^2 \Rightarrow y = \frac{x^2}{8} \rightarrow$ parabole

2) $\vec{v}(M/\Re) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt/\Re} = 2\vec{i} + (t+1)\vec{j} \quad \rightarrow \quad \vec{\gamma}(M/\Re) = \frac{d\vec{v}(M/\Re)}{dt/\Re} = \vec{j}$

3) $\vec{\gamma}_t = \frac{d\left(\|\vec{v}(M/\Re)\|\right)}{dt}\vec{\tau}\,,\ \|\vec{v}(M/\Re)\| = \sqrt{4 + (t+1)^2} = \sqrt{5 + 2t + t^2} \rightarrow \frac{d\left(\|\vec{v}(M/\Re)\|\right)}{dt} = \frac{1+t}{\sqrt{5+2t+t^2}}$

$\rightarrow \vec{\gamma}_t = \frac{1+t}{\sqrt{5+2t+t^2}}\vec{\tau} \Rightarrow \|\vec{\gamma}_t\| = \frac{1+t}{\sqrt{5+2t+t^2}}$

$\vec{\gamma}(M/\Re) = \vec{\gamma}_t + \vec{\gamma}_n \rightarrow \vec{\gamma}(M/\Re)^2 = \vec{\gamma}_t^{\,2} + \vec{\gamma}_n^{\,2} = 1 \rightarrow \vec{\gamma}_n^{\,2} = 1 - \vec{\gamma}_t^{\,2} = \frac{4}{5+2t+t^2} \Rightarrow \|\vec{\gamma}_n\| = \frac{2}{\sqrt{5+2t+t^2}}$

4) $\vec{\gamma}_n = \frac{\|\vec{v}(M/\Re)\|^2}{R_c}\vec{n} \rightarrow \|\vec{\gamma}_n\| = \frac{\|\vec{v}(M/\Re)\|^2}{R_c} \rightarrow \frac{2}{\sqrt{5+2t+t^2}} = \frac{5+2t+t^2}{R_c} \Rightarrow R_C = \frac{1}{2}\left(5+2t+t^2\right)^{\frac{3}{2}}$

$R_c = \frac{\|\vec{v}(M/\Re)\|^3}{\|\vec{v}(M/\Re) \wedge \vec{\gamma}(M/\Re)\|} = \frac{\sqrt{5+2t+t^2}^{\,3}}{\|2\vec{k}\|} = \frac{1}{2}\left(5+2t+t^2\right)^{\frac{3}{2}}$

Exercice 2:

1) $\vec{j} = sin(\alpha)\vec{v} + cos(\alpha)\vec{w}$ **,** $\vec{k} = -cos(\alpha)\vec{v} + sin(\alpha)\vec{w}$

2) $\vec{\Omega}(\Re_1/\Re) = \dot{\alpha}\,\vec{i} \quad \Rightarrow \quad \Omega(\Re_1/\Re) = \omega\,\vec{u}$

3) $\overrightarrow{OA} = \ell\, cos(\alpha)\vec{k} \Rightarrow \overrightarrow{OA} = -\ell\, cos(\alpha)^2\vec{v} + \ell\, sin(\alpha)cos(\alpha)\vec{w}$

$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM} = -\ell\, cos(\alpha)^2\vec{v} + \ell\, sin(\alpha)cos(\alpha)\vec{w} + r\vec{v} \Rightarrow \overrightarrow{OM} = \left(r - \ell\, cos(\alpha)^2\right)\vec{v} + \ell\, sin(\alpha)cos(\alpha)\vec{w}$

4) $\vec{v}_r(M) = \vec{v}(M/\Re_1) = \frac{d\overrightarrow{AM}}{dt/\Re_1} = \dot{r}\vec{v}$

$\vec{v}_e(M) = \vec{v}(A/\Re) + \Omega(\Re_1/\Re) \wedge \overrightarrow{AM}$

$\vec{v}(A/\Re) = \frac{d\overrightarrow{OA}}{dt/\Re} = -\ell\omega\, sin(\alpha)\vec{k} = \ell\omega\, sin(\alpha)cos(\alpha)\vec{v} - \ell\omega\, sin(\alpha)^2\vec{w}$

$\vec{\Omega}(\Re_1/\Re) \wedge \overrightarrow{AM} = \omega\vec{u} \wedge r\vec{v} = r\omega\vec{w} \quad \Rightarrow \quad \vec{v}_e(M) = \ell\omega\, sin(\alpha)cos(\alpha)\vec{v} + \left(r\omega - \ell\omega\, sin(\alpha)^2\right)\vec{w}$

5) $\vec{\gamma}_r(M) = \frac{d\vec{v}(M/\Re_1)}{dt/\Re_1} = \ddot{r}\vec{v}$

$\vec{\gamma}_e(M) = \vec{\gamma}(A/\Re) + \frac{d\vec{\Omega}(\Re_1/\Re)}{dt/\Re} + \vec{\Omega}(\Re_1/\Re) \wedge \left[\vec{\Omega}(\Re_1/\Re) \wedge \overrightarrow{AM}\right]$

$\vec{\gamma}(A/\Re) = -\ell\omega^2\, cos(\alpha)\vec{k} = \ell\omega^2\, cos(\alpha)^2\vec{v} - \ell\omega^2\, sin(\alpha)cos(\alpha)\vec{w}$

$\frac{d\vec{\Omega}(\Re_1/\Re)}{dt/\Re} = \frac{d\omega\vec{i}}{dt/\Re} = \vec{0}\,,\ \vec{\Omega}(\Re_1/\Re) \wedge \left[\vec{\Omega}(\Re_1/\Re) \wedge \overrightarrow{AM}\right] = \omega\vec{u} \wedge r\omega\vec{w} = -r\omega^2\vec{v}$

$\Rightarrow \vec{\gamma}_e(M) = \left(\ell\omega^2\, cos(\alpha)^2 - r\omega^2\right)\vec{v} - \ell\omega^2\, sin(\alpha)cos(\alpha)\vec{w}$

$\vec{\gamma}_c(M) = 2\vec{\Omega}(\Re_1/\Re) \wedge \vec{v}(M/\Re_1) = 2\omega\vec{u} \wedge \dot{r}\vec{v} \quad \Rightarrow \quad \vec{\gamma}_c(M) = 2\dot{r}\omega\vec{w}$

6) $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{k} = mg\, cos(\alpha)\vec{v} - mg\, sin(\alpha)\vec{w}$

$\vec{f}_e = -m\vec{\gamma}_e = \left(rm\omega^2 - \ell m\omega^2\, cos(\alpha)^2\right)\vec{v} + \ell m\omega^2\, sin(\alpha)cos(\alpha)\vec{w}\,, \qquad \vec{f}_c = -m\vec{\gamma}_c = -2m\dot{r}\omega\vec{w}$

7) $m\vec{\gamma}(M/\Re_1) = \vec{P} + \vec{R} + \vec{f}_e + \vec{f}_c \rightarrow$

$$m\ddot{r}\vec{v} = mg\cos(\alpha)\vec{v} - mg\sin(\alpha)\vec{w} + \left(rm\omega^2 - \ell m\omega^2\cos(\alpha)^2\right)\vec{v} + \ell m\omega^2\sin(\alpha)\cos(\alpha)\vec{w} - 2m\dot{r}\omega\vec{w} \rightarrow$$

$$\begin{cases} 0 = -mg\sin(\alpha) + \ell m\omega^2\sin(\alpha)\cos(\alpha) - 2m\dot{r}\omega + R_w \\ 0 = R_u \\ m\ddot{r} = mg\cos(\alpha) + rm\omega^2 - \ell m\omega^2\cos(\alpha)^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} R_w = mg\sin(a) - \ell m\omega^2\sin(a)\cos(a) + 2m\dot{r}\omega \\ R_u = 0 \\ \ddot{r} = g\cos(a) + r\omega^2 - \ell\omega^2\cos(a)^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow\ \ddot{r} = g\cos(\alpha) + r\omega^2 - \ell\omega^2\cos(\alpha)^2 \quad \text{et} \quad \vec{R} = \left(mg\sin(\alpha) - \ell m\omega^2\sin(\alpha)\cos(\alpha) + 2m\dot{r}\omega\right)\vec{w}$$

8) $\Re_1$ est non galiléen $\rightarrow \dfrac{dE_c(M/\Re_1)}{dt} = P(\vec{P}/\Re_1) + P(\vec{R}/\Re_1) + P(\vec{f}_e/\Re_1)$

$$E_c(M/\Re_1) = \frac{1}{2}m\vec{v}^2(M/\Re_1) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 \rightarrow \frac{dE_c(M/\Re_1)}{dt} = m\dot{r}\ddot{r}$$

$$P(\vec{P}/\Re_1) = \vec{P}\vec{v}(M/\Re_1) = mg\dot{r}\cos(\alpha),\ P(\vec{f}_e/\Re_1) = \vec{f}_e\vec{v}(M/\Re_1) = r\dot{r}m\omega^2 - \ell\dot{r}m\omega^2\cos(\alpha)^2$$

$\vec{R} = R_u\vec{u} + R_v\vec{v} + R_w\vec{w}$, sans frottement $R_v = 0 \rightarrow \vec{R} = R_u\vec{u} + R_w\vec{w} \rightarrow P(\vec{R}/\Re_1) = \vec{R}\vec{v}(M/\Re_1) = 0$

$$\Rightarrow m\dot{r}\ddot{r} = mg\dot{r}\cos(\alpha) + r\dot{r}m\omega^2 - \ell\dot{r}m\omega^2\cos(\alpha)^2 \Rightarrow\ \ddot{r} = g\cos(\alpha) + r\omega^2 - \ell\omega^2\cos(\alpha)^2$$

9) $\vec{\sigma}_A(M/\Re) = \overrightarrow{AM} \wedge m\vec{v}(M/\Re)$

$$\vec{v}(M/\Re) = \vec{v}_r + \vec{v}_e = (\dot{r} + \ell\omega\sin(\alpha)\cos(\alpha))\vec{v} + \left(r\omega - \ell\omega\sin(\alpha)^2\right)\vec{w}$$

$$\rightarrow\ \vec{\sigma}_A(M/\Re) = r\vec{v} \wedge \left[(m\dot{r} + m\ell\omega\sin(\alpha)\cos(\alpha))\vec{v} + \left(mr\omega - m\ell\omega\sin(\alpha)^2\right)\vec{w}\right] = \left(mr^2\omega - mr\ell\omega\sin(\alpha)^2\right)\vec{u}$$

$$\Rightarrow \vec{\sigma}_A(M/\Re) = \left(mr^2\omega - mr\ell\omega\sin(\alpha)^2\right)\vec{u}$$

10) $\dfrac{d\vec{\sigma}_A(M/\Re)}{dt/\Re} = \overrightarrow{m}_A\left(\sum \vec{F}_{ext}\right) + m\vec{v}(M/\Re) \wedge \vec{v}(A/\Re)$

$$\frac{d\vec{\sigma}_A(M/\Re)}{dt/\Re} = \left(2mr\dot{r}\omega - m\dot{r}\ell\omega\sin(\alpha)^2 - 2mr\ell\omega^2\sin(\alpha)\cos(\alpha)\right)\vec{u}$$

$$\overrightarrow{m}_A(\vec{P}) = \overrightarrow{AM} \wedge \vec{P} = r\vec{v} \wedge (mg\cos(\alpha)\vec{v} - mg\sin(\alpha)\vec{w}) = -mrg\sin(\alpha)\vec{u}$$

$$\overrightarrow{m}_A(\vec{R}) = \overrightarrow{AM} \wedge \vec{R} = r\vec{v} \wedge (R_u\vec{u} + R_w\vec{w}) = -rR_u\vec{w} + rR_w\vec{u}$$

$m\vec{v}(M/\Re) \wedge \vec{v}(A/\Re)$

$$= m\left((\dot{r} + \ell\omega\sin(\alpha)\cos(\alpha))\vec{v} + \left(r\omega - \ell\omega\sin(\alpha)^2\right)\vec{w}\right) \wedge \left(\ell\omega\sin(\alpha)\cos(\alpha)\vec{v} - \ell\omega\sin(\alpha)^2\vec{w}\right)$$

$$= -m\ell\omega\sin(\alpha)^2(\dot{r} + \ell\omega\sin(\alpha)\cos(\alpha))\vec{u} - \ell\omega\sin(\alpha)\cos(\alpha)\left(r\omega - \ell\omega\sin(\alpha)^2\right)\vec{u}$$

$$= \left[-m\dot{r}\ell\omega\sin(\alpha)^2 - m\ell^2\omega^2\sin(\alpha)^3\cos(\alpha) - m\ell r\omega^2\sin(\alpha)\cos(\alpha) + m\ell^2\omega^2\sin(\alpha)^3\cos(\alpha)\right]\vec{u}$$

$$= \left[-m\dot{r}\ell\omega\sin(\alpha)^2 - m\ell r\omega^2\sin(\alpha)\cos(\alpha)\right]\vec{u}$$

$$\rightarrow \left(2mr\dot{r}\omega - m\dot{r}\ell\omega\sin(\alpha)^2 - 2mr\ell\omega^2\sin(\alpha)\cos(\alpha)\right)\vec{u}$$

$$= -mrg\sin(\alpha)\vec{u} - rR_u\vec{w} + rR_w\vec{u} - \left(m\dot{r}\ell\omega\sin(\alpha)^2 + m\ell r\omega^2\sin(\alpha)\cos(\alpha)\right)\vec{u}$$

$\rightarrow$

$$\begin{cases} R_u = 0 \\ 2mr\dot{r}\omega - m\dot{r}\ell\omega\sin(\alpha)^2 - 2mr\ell\omega^2\sin(\alpha)\cos(\alpha) = -mrg\sin(\alpha) + rR_w - m\dot{r}\ell\omega\sin(\alpha)^2 - m\ell r\omega^2\sin(\alpha)\cos(\alpha) \end{cases}$$

$$2mr\dot{r}\omega - mr\ell\omega^2\sin(\alpha)\cos(\alpha) = -mrg\sin(\alpha) + rR_w$$

$$\Rightarrow R_w = mg\sin(\alpha) + 2m\dot{r}\omega - m\ell\omega^2\sin(\alpha)\cos(\alpha) \quad \Rightarrow\ \vec{R} = \left(mg\sin(\alpha) - \ell m\omega^2\sin(\alpha)\cos(\alpha) + 2m\dot{r}\omega\right)\vec{w}$$

Examen 3 (Session ordinaire) (durée 2h)

Questions de cours :

1)- Que désigne les vecteurs $\vec{\tau}, \vec{n}$ et $\vec{b}$ de la base de Frenet.

2)- Dans le référentiel d'étude, les normes de la vitesse et de l'accélération d'un point matériel sont constantes au cours du temps et non nulles. Quelle est la nature du mouvement ?

Exercice 1 :

Les coordonnées cartésiennes d'un point matériel M dans un repère orthonormé direct $\mathfrak{R}(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ sont données en fonction du temps par : $x(t) = 0.3\cos(\omega t)$, $y(t) = 0.3\sin(\omega t)$ et $z(t) = 0.1\,\omega t$ (ω étant une constant positive).

1)- Exprimer dans la base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, les vecteurs vitesse $\vec{v}(M/\mathfrak{R})$ et accélération $\vec{\gamma}(M/\mathfrak{R})$.

2)- Exprimer dans la base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, les accélérations tangentielle, $\vec{\gamma}_t$, et normale, $\vec{\gamma}_n$, de M.

3)- Exprimer dans la base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, les vecteurs de la base de Frenet $(\vec{\tau},\vec{n},\vec{b})$.

4)- Calculer le rayon de courbure Rc de la trajectoire par **deux méthodes différentes**.

5)- Exprimer, en fonction du temps t, l'abscisse curviligne $s(t)$ de M, comptée à partir d'un point qui correspond aux coordonnées cartésiennes ($x = 0.3$, $y = 0$ et $z = 0$).

Exercice 2 :

On considère le repère fixe $\mathfrak{R}(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ (repère absolu), $(\vec{i},\vec{j})$ étant le plan horizontal. Soit une tige horizontale (OA), en mouvement autour de l'axe $(O\vec{k})$ avec une vitesse angulaire constante ω. On désigne par $\mathfrak{R}_1(O,\vec{e}_\rho,\vec{e}_\varphi,\vec{e}_z)$ le repère lié à la tige (repère relatif). Soit un anneau assimilé à un point matériel M, de masse m, se déplaçant sans frottement sur la tige (OA) et repéré dans $\mathfrak{R}$ par ses coordonnées polaires ρ et φ (voir la figure ci-dessous). On suppose que $\rho(t=0)=\rho_0$ et $\dot{\rho}(t=0)=0$.

A- Etude dans le référentiel $\mathfrak{R}_1$:

1)- Exprimer dans la base $(\vec{e}_\rho,\vec{e}_\varphi,\vec{e}_z)$:

  a)- les vecteurs vitesse et accélération du point M par rapport au repère $\mathfrak{R}_1$.

  b)- le moment cinétique en O par rapport au repère $\mathfrak{R}_1$.

  c)- le poids de M et les forces d'inertie d'entraînement et de Coriolis.

2)- Quelle est l'allure de la trajectoire de M dans $\mathfrak{R}_1$.

3)- Calculer les énergies cinétique et mécanique de M par rapport au repère $\mathfrak{R}_1$.

4)- En appliquant le théorème du moment cinétique dans le repère $\mathfrak{R}_1$, déterminer les composantes de la réaction $\vec{R}$, exercée sur M par la tige, dans la base $(\vec{e}_\rho,\vec{e}_\varphi,\vec{e}_z)$.

5)- En appliquant le théorème de l'énergie mécanique dans le repère $\mathfrak{R}_1$, déterminer l'équation différentielle du mouvement de M.

B- Etude dans le référentiel $\mathfrak{R}$:

1)- Exprimer dans la base $(\vec{e}_\rho,\vec{e}_\varphi,\vec{e}_z)$:

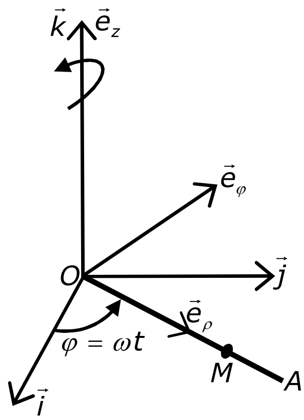
  a) les vecteurs vitesse et accélération du point M par rapport à $\mathfrak{R}$.

  b) le moment cinétique en O par rapport au repère $\mathfrak{R}$.

2)- Quelle est l'allure de la trajectoire de M dans $\mathfrak{R}$.

3)- Calculer les énergies cinétique et mécanique de M par rapport à $\mathfrak{R}$.

4)- En appliquant le théorème du moment cinétique dans le repère $\mathfrak{R}$, retrouver les composantes de la réaction $\vec{R}$, exercée sur M par la tige, dans la base $(\vec{e}_\rho,\vec{e}_\varphi,\vec{e}_z)$



5)- En appliquant le théorème de l'énergie mécanique dans le repère $\mathfrak{R}$, retrouver l'équation différentielle du mouvement de M. Donner la solution de cette équation en fonction de ρ_0 et ω.

6)- Maintenant l'anneau est soumis à une force de rappel par l'intermédiaire d'un ressort de raideur k, de masse négligeable et de longueur à vide ρ_0. Le ressort est enfilé sur la tige, une extrémité est fixée en O et l'autre est attachée au point M. En appliquant le principe fondamental de la dynamique dans $\mathfrak{R}$, établir la nouvelle équation différentielle du mouvement de l'anneau lors de la rotation de la tige en fonction de $\ddot{\rho}$, ρ, ρ_0, k, m et ω.

Correction d'examen 3 (session ordinaire)

Questions de cours :

1)- $\vec{\tau}$: vecteur unitaire tangent à la trajectoire en *M* et de même sens que le mouvement.

$\vec{n}$: vecteur unitaire perpendiculaire à $\vec{\tau}$ est dirigé vers le centre de courbure de la trajectoire.

$\vec{b}$: vecteur unitaire perpendiculaire au plan formé par $\vec{\tau}$ et $\vec{n}$.

2)- est un mouvement circulaire uniforme.

Exercice 1:

1)- Expression dans la base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, des vecteurs vitesse $\vec{v}(M/\Re)$ et accélération $\vec{\gamma}(M/\Re)$:

$$-\vec{v}(M/\Re)=\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt/\Re} \quad\Rightarrow\quad \vec{v}(M/\Re)=-0.3\omega\sin(\omega t)\vec{i}+0.3\omega\cos(\omega t)\vec{j}+0.1\omega\vec{k}$$

$$-\vec{\gamma}(M/\Re)=\frac{d\vec{v}(M/\Re)}{dt/\Re} \quad\Rightarrow\quad \vec{\gamma}(M/\Re)=-0.3\omega^2\cos(\omega t)\vec{i}-0.3\omega^2\sin(\omega t)\vec{j}$$

2)- Expression dans la base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, des accélérations tangentielle, $\vec{\gamma}_t$, et normale, $\vec{\gamma}_n$:

$$-\vec{\gamma}_t=\frac{d\|\vec{v}(M/\Re)\|}{dt}\vec{\tau}\ ,\quad \|\vec{v}(M/\Re)\|=\sqrt{0.1}\,\omega \quad\Rightarrow\quad \vec{\gamma}_t=\vec{0}$$

$$-\ \vec{\gamma}(M/\Re)=\vec{\gamma}_t+\vec{\gamma}_n \rightarrow \vec{\gamma}(M/\Re)=\vec{\gamma}_n \quad\Rightarrow\quad \vec{\gamma}_n=-0.3\omega^2\cos(\omega t)\vec{i}-0.3\omega^2\sin(\omega t)\vec{j}$$

3)- Expression dans la base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, des vecteurs de la base de Frenet $(\vec{\tau},\vec{n},\vec{b})$:

$$-\ \vec{\tau}=\frac{\vec{v}(M/\Re)}{\|\vec{v}(M/\Re)\|} \quad\Rightarrow\quad \vec{\tau}=-3\sqrt{0.1}\sin(\omega t)\vec{i}+3\sqrt{0.1}\cos(\omega t)\vec{j}+\sqrt{0.1}\vec{k}$$

$$-\ \vec{\gamma}_n=\underbrace{\frac{\|\vec{v}(M/\Re)\|^2}{Rc}}_{>0}\vec{n}=\underbrace{0.3\omega^2}_{>0}\underbrace{\left(-\cos(\omega t)\vec{i}-\sin(\omega t)\vec{j}\right)}_{\|-\cos(\omega t)\vec{i}-\sin(\omega t)\vec{j}\|=1} \quad\Rightarrow\quad \vec{n}=-\cos(\omega t)\vec{i}-\sin(\omega t)\vec{j}$$

$$-\ \vec{b}=\vec{\tau}\wedge\vec{n} \quad\Rightarrow\quad \vec{b}=\sqrt{0.1}\sin(\omega t)\vec{i}-\sqrt{0.1}\cos(\omega t)\vec{j}+3\sqrt{0.1}\vec{k}$$

4)- Calculer le rayon de courbure Rc de la trajectoire :

1ère méthodes :

$$Rc=\frac{\|\vec{v}(M/\Re)\|^3}{\|\vec{v}(M/\Re)\wedge\vec{\gamma}(M/\Re)\|},\quad \vec{v}(M/\Re)\wedge\vec{\gamma}(M/\Re)=0.03\omega^3\sin(\omega t)\vec{i}-0.03\omega^3\cos(\omega t)\vec{j}+0.09\omega^3\vec{k}$$

$$\rightarrow \|\vec{v}(M/\Re)\wedge\vec{\gamma}(M/\Re)\|=0.3\sqrt{0.1}\,\omega^3 \rightarrow Rc=\frac{0.1\sqrt{0.1}\,\omega^3}{0.3\sqrt{0.1}\,\omega^3} \quad\Rightarrow\quad Rc=\frac{1}{3}$$

2ère méthodes :

$$\vec{\gamma}_n=\frac{\|\vec{v}(M/\Re)\|^2}{Rc}\vec{n} \rightarrow \|\vec{\gamma}_n\|=\frac{\|\vec{v}(M/\Re)\|^2}{Rc} \rightarrow Rc=\frac{\|\vec{v}(M/\Re)\|^2}{\|\vec{\gamma}_n\|}=\frac{0.1\omega^2}{0.3\omega^2} \quad\Rightarrow\quad Rc=\frac{1}{3}$$

5)- Expression , en fonction du temps *t*, l'abscisse curviligne *s* de *M* :

$$\frac{ds(t)}{dt}=\|\vec{v}(M/\Re)\|=\sqrt{0.1}\,\omega \rightarrow s(t)=\sqrt{0.1}\,\omega t+s_0$$

$s=0$ au point de coordonnées $x=0.3$, $y=0$ et $z=0$ c'est-à-dire à $t=0\rightarrow s_0=0 \Rightarrow s(t)=\sqrt{0.1}\,\omega t$

Exercice 2:

A- Etude dans le référentiel $\mathcal{R}_1$:

1)- On exprime dans la base $(\vec{e}_\rho,\vec{e}_\varphi,\vec{e}_z)$:

a)- les vecteurs vitesse et accélération du point *M* par rapport au repère $\mathcal{R}_1$:

$$-\vec{v}(M/\Re_1)=\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt/\Re_1}=\frac{d(\rho\vec{e}_\rho)}{dt/\Re_1} \quad\Rightarrow\quad \vec{v}(M/\Re_1)=\dot{\rho}\vec{e}_\rho$$

$$-\vec{\gamma}(M/\Re_1)=\frac{d\vec{v}(M/\Re_1)}{dt/\Re_1}=\frac{d(\dot{\rho}\vec{e}_\rho)}{dt/\Re_1} \quad\Rightarrow\quad \vec{\gamma}(M/\Re_1)=\ddot{\rho}\vec{e}_\rho$$

b)- le moment cinétique en *O* par rapport au repère $\mathcal{R}_1$:

$\vec{\sigma}_O(M/\Re_1) = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v}(M/\Re_1) = \rho\vec{e}_\rho \wedge m\dot{\rho}\vec{e}_\rho \quad \Rightarrow \quad \vec{\sigma}_O(M/\Re_1) = \vec{0}$

c)- le poids de M et les forces d'inertie d'entraînement et de Coriolis.

- $\vec{P} = m\vec{g} \Rightarrow \vec{P} = -mg\vec{e}_z$

$$-\vec{\gamma}_e = \vec{\gamma}(O/\Re) + \underbrace{\frac{d\vec{\Omega}(\Re_1/\Re)}{dt/\Re} \wedge \overrightarrow{OM} + \vec{\Omega}(\Re_1/\Re) \wedge \left[\vec{\Omega}(\Re_1/\Re) \wedge \overrightarrow{OM}\right]}_{\vec{0}}$$

$$\vec{\Omega}(\Re_1/\Re) = \omega\vec{e}_z \,,\ \overrightarrow{OM} = \rho\vec{e}_\rho \to \vec{\gamma}_e = -\rho\omega^2\vec{e}_\rho \ ,\ \vec{F}_e = -m\vec{\gamma}_e \quad \Rightarrow \vec{F}_e = m\rho\omega^2\vec{e}_\rho$$

- $\vec{\gamma}_c = 2\vec{\Omega}(\Re_1/\Re) \wedge \vec{v}(M/\Re_1) = 2\omega\dot{\rho}\vec{e}_\varphi \,,\ \vec{F}_c = -m\vec{\gamma}_c \,,\ \Rightarrow \vec{F}_c = -2m\omega\dot{\rho}\vec{e}_\varphi$

2)- l'allure de la trajectoire de M dans $\mathscr{R}_1$ est la droite (OA).

3)- Energies cinétique et mécanique de M par rapport au repère $\mathscr{R}_1$:

- $E_c(M/\Re_1) = \dfrac{1}{2}m\vec{v}(M/\Re_1)^2 \Rightarrow E_c(M/\Re_1) = \dfrac{1}{2}m\dot{\rho}^2$

- $\overrightarrow{rot}\vec{F}_e = \vec{0} \to \vec{F}_e \to E_{Pe}$

$$dE_{Pe} = -dw(\vec{F}_e/\Re_1) = -\vec{F}_e d\overrightarrow{OM} = -m\rho\omega^2\vec{e}_\rho(d\rho\vec{e}_\rho + \rho d\varphi\vec{e}_\varphi + dz\vec{e}_z) = -m\omega^2\rho d\rho \to E_{Pe} = -\frac{1}{2}m\omega^2\rho^2 + Cte$$

$$dE_{Pg} = -dw(\vec{P}/\Re_1) = -\vec{P}d\overrightarrow{OM} = mg\vec{e}_z(d\rho\vec{e}_\rho + \rho d\varphi\vec{e}_\varphi + dz\vec{e}_z) = mgdz \quad , \ dz = 0 \quad \to E_{Pg} = Cte$$

$$\Rightarrow \quad E_p(M/\Re_1) = -\frac{1}{2}m\omega^2\rho^2 + Cte$$

$$E_m(M/\Re_1) = E_c(M/\Re_1) + E_p(M/\Re_1) \quad \Rightarrow \quad E_m(M/\Re_1) = \frac{1}{2}m\dot{\rho}^2 - \frac{1}{2}m\omega^2\rho^2 + Cte$$

4)- Application du théorème du moment cinétique dans le repère $\mathscr{R}_1$:

$$\frac{d\vec{\sigma}_O(M/\Re_1)}{dt/\Re_1} = \vec{m}_O(\vec{P}) + \vec{m}_O(\vec{R}) + \vec{m}_O(\vec{F}_e) + \vec{m}_O(\vec{F}_c)$$

$$\vec{m}_O(\vec{P}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{P} = \rho\vec{e}_\rho \wedge (-mg\vec{e}_z) = mg\rho\vec{e}_\varphi$$

$\vec{R} = R_\rho\vec{e}_\rho + R_\varphi\vec{e}_\varphi + R_z\vec{e}_z$, mouvement sans frottement $\to$ $R_\rho = 0$ $\to$ $\vec{R} = R_\varphi\vec{e}_\varphi + R_z\vec{e}_z$

$$\vec{m}_O(\vec{R}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{R} = \rho\vec{e}_\rho \wedge (R_\varphi\vec{e}_\varphi + R_z\vec{e}_z) = \rho R_\varphi\vec{e}_z - \rho R_z\vec{e}_\varphi$$

$$\vec{m}_O(\vec{F}_e) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}_e = \rho\vec{e}_\rho \wedge m\rho\omega^2\vec{e}_\rho = \vec{0}$$

$$\vec{m}_O(\vec{F}_c) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}_c = \rho\vec{e}_\rho \wedge -2m\dot{\rho}\omega\vec{e}_\varphi = -2m\rho\dot{\rho}\omega\vec{e}_z$$

$$\frac{d\vec{\sigma}_O(M/\Re_1)}{dt/\Re_1} = \vec{0} \Rightarrow mg\rho\vec{e}_\varphi + \rho R_\varphi\vec{e}_z - \rho R_z\vec{e}_\varphi - 2m\rho\dot{\rho}\omega\vec{e}_z = \vec{0} \quad \Rightarrow R_\rho = 0 \,,\ R_\varphi = 2m\dot{\rho}\omega \ \text{ et } \ R_z = mg$$

5)- Application du théorème de l'énergie mécanique dans le repère $\mathscr{R}_1$:

$$\frac{dE_m(M/\Re_1)}{dt} = P(\vec{F}_{ncon}/\Re_1) \ ,\ \ P(\vec{F}_{ncon}/\Re_1) = P(\vec{R}/\Re_1) = \vec{R}\vec{v}(M/\Re_1) = (R_\varphi\vec{e}_\varphi + R_z\vec{e}_z)\dot{\rho}\vec{e}_\rho = 0$$

$$\frac{dE_m(M/\Re_1)}{dt} = \frac{d\left(\frac{1}{2}m\dot{\rho}^2 - \frac{1}{2}m\omega^2\rho^2 + Cte\right)}{dt} = m\dot{\rho}\ddot{\rho} - m\omega^2\rho\dot{\rho} = 0 \Rightarrow \ddot{\rho} - \omega^2\rho = 0 \ \text{ Eq. diff du mvt.}$$

B- Etude dans le référentiel $\mathscr{R}$:

1)- On exprime dans la base ($\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z$) :

a)- les vecteurs vitesse et accélération du point M par rapport au repère $\mathscr{R}$:

- $\vec{v}(M/\Re) = \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt/\Re} = \dfrac{d(\rho\vec{e}_\rho)}{dt/\Re} \quad \Rightarrow \quad \vec{v}(M/\Re) = \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\omega\vec{e}_\varphi$

- $\vec{\gamma}(M/\Re) = \dfrac{d\vec{v}(M/\Re)}{dt/\Re} = \dfrac{d(\dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\omega\vec{e}_\varphi)}{dt/\Re} \quad \Rightarrow \quad \vec{\gamma}(M/\Re) = (\ddot{\rho} - \rho\omega^2)\vec{e}_\rho + 2\dot{\rho}\omega\vec{e}_\varphi$

b)- le moment cinétique en O par rapport au repère $\Re$:

$\vec{\sigma}_O(M/\Re) = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v}(M/\Re) = \rho\vec{e}_\rho \wedge (m\dot{\rho}\vec{e}_\rho + m\rho\omega\vec{e}_\varphi) \quad \Rightarrow \quad \vec{\sigma}_O(M/\Re) = m\rho^2\omega\vec{e}_z$

2)- l'allure de la trajectoire de M dans $\Re$ est une spirale.

3)- Energies cinétique et mécanique de M par rapport au repère $\Re$:

- $E_c(M/\Re) = \dfrac{1}{2}m\vec{v}(M/\Re)^2 \Rightarrow E_c(M/\Re) = \dfrac{1}{2}m\dot{\rho}^2 + \dfrac{1}{2}m\rho^2\omega^2$

- $dE_{Pg} = -\vec{P}d\overrightarrow{OM} = mg\vec{e}_z(d\rho\vec{e}_\rho + \rho d\varphi\vec{e}_\varphi + dz\vec{e}_z) = mgdz$ **,** $dz = 0 \quad \to E_{Pg} = Cte \Rightarrow \quad E_p(M/\Re) = Cte$

$E_m(M/\Re) = E_c(M/\Re) + E_p(M/\Re) \quad \Rightarrow \quad E_m(M/\Re) = \dfrac{1}{2}m\dot{\rho}^2 + \dfrac{1}{2}m\rho^2\omega^2 + Cte$

4)- Application du théorème du moment cinétique dans le repère $\Re$:

$\dfrac{d\vec{\sigma}_O(M/\Re)}{dt/\Re} = \vec{m}_O(\vec{P}) + \vec{m}_O(\vec{R})$

$\vec{m}_O(\vec{P}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{P} = \rho\vec{e}_\rho \wedge (-mg\vec{e}_z) = mg\rho\vec{e}_\varphi$

$\vec{R} = R_\rho\vec{e}_\rho + R_\varphi\vec{e}_\varphi + R_z\vec{e}_z$, mouvement sans frottement $\quad \to \quad R_\rho = 0 \quad \to \quad \vec{R} = R_\varphi\vec{e}_\varphi + R_z\vec{e}_z$

$\vec{m}_O(\vec{R}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{R} = \rho\vec{e}_\rho \wedge (R_\varphi\vec{e}_\varphi + R_z\vec{e}_z) = \rho R_\varphi\vec{e}_z - \rho R_z\vec{e}_\varphi$

$\dfrac{d\vec{\sigma}_O(M/\Re)}{dt/\Re} = 2m\rho\dot{\rho}\omega\vec{e}_z \Rightarrow mg\rho\vec{e}_\varphi + \rho R_\varphi\vec{e}_z - \rho R_z\vec{e}_\varphi = 2m\rho\dot{\rho}\omega\vec{e}_z \quad \Rightarrow R_\rho = 0$, $R_\varphi = 2m\dot{\rho}\omega$ et $R_z = mg$

5)- Application du théorème de l'énergie mécanique dans le repère $\Re$:

$\dfrac{dE_m(M/\Re)}{dt} = P(\vec{F}_{ncon}/\Re)$, $P(\vec{F}_{ncon}/\Re) = P(\vec{R}/\Re) = \vec{R}\vec{v}(M/\Re) = (R_\varphi\vec{e}_\varphi + R_z\vec{e}_z)(\dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\omega\vec{e}_\varphi) = R_\varphi\rho\omega$

$P(\vec{F}_{ncon}/\Re) = 2m\rho\dot{\rho}\omega^2$ et $\dfrac{dE_m(M/\Re_1)}{dt} = \dfrac{d\left(\dfrac{1}{2}m\dot{\rho}^2 + \dfrac{1}{2}m\rho^2\omega^2 + Cte\right)}{dt} = m\dot{\rho}\ddot{\rho} + m\omega^2\rho\dot{\rho}$

$\to m\dot{\rho}\ddot{\rho} + m\omega^2\rho\dot{\rho} = 2m\rho\dot{\rho}\omega^2 \to \ddot{\rho} + \omega^2\rho = 2\rho\omega^2 \Rightarrow \ddot{\rho} - \omega^2\rho = 0$

La solution de cette équation est sous la forme : $\rho(t) = Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t}$

$\rho(t=0) = \rho_0$ et $\dot{\rho}(t=0) = 0 \to A + B = \rho_0$ et $A\omega - B\omega = 0 \to A = B = \dfrac{\rho_0}{2} \to \rho(t) = \dfrac{\rho_0}{2}(e^{\omega t} + e^{-\omega t})$

$$\Rightarrow \rho(t) = \rho_0 coh(\omega t)$$

6)- Application du principe fondamental de dynamique dans $\Re$:

$\vec{P} + \vec{R} + \vec{F} = m\vec{\gamma}(M/\Re)$

$\vec{R} = R_\varphi\vec{e}_\varphi + R_z\vec{e}_z$ (réaction de la tige sur M) $\vec{P} = -mg\vec{e}_z$ (poids de M)

$\vec{F} = -k(\rho - \rho_0)\vec{e}_\rho$:force de rappel (force appliquée par le rerssort sur M)($d\ell = \rho - \rho_0$)

$\to -mg\vec{e}_z + R_\varphi\vec{e}_\varphi + R_z\vec{e}_z - k(\rho - \rho_0)\vec{e}_\rho = m(\ddot{\rho} - \rho\omega^2)\vec{e}_\rho + 2m\dot{\rho}\omega\vec{e}_\varphi$

$\to R_\varphi = 2m\dot{\rho}\omega$ et $R_z = mg$ et $-k(\rho - \rho_0) = m(\ddot{\rho} - \rho\omega^2)$

$\Rightarrow \ddot{\rho} + (\dfrac{k}{m} - \omega^2)\rho = \dfrac{k}{m}\rho_0$: la nouvelle équation différentielle du mouvement de l'anneau lors de la rotation de la tige lorsque M soumis à une force de rappel par l'intermédiaire d'un ressort de raideur k, de masse négligeable et de longueur à vide ρ_0.

Examen 4 (Session rattrapage) (durée 1h30min)

Exercice 1 :

Les coordonnées cartésiennes d'un point matériel *M* dans un repère orthonormé direct $\Re(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ sont données en fonction du temps par : $x(t)=t^2-4t+1$, $y(t)=-2t^4$ et $z(t)=3t^2$.

Dans un deuxième référentiel $\Re_1(O_1,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, elles ont pour expressions :

$X_1(t)=t^2+t+2$, $y_1(t)=-2t^4+5$ et $z_1(t)=3t^2-7$

1)- Déterminer les expressions des vecteurs vitesses $\vec{v}(M/\Re)$ et $\vec{v}(M/\Re_1)$.

2)- Exprimer $\vec{v}(M/\Re)$ en fonction de $\vec{v}(M/\Re_1)$.

3)- Exprimer le vecteur accélération $\vec{\gamma}(M/\Re)$ en fonction du vecteur accélération $\vec{\gamma}(M/\Re_1)$.

4)- Quelle est la nature du mouvement du $\Re_1$ par rapport à $\Re$? Justifier votre réponse.

5)- Supposons que $\Re$ est galiléen. $\Re_1$ est-il aussi galiléen ? Justifier votre réponse.

Exercice 2 :

Un point matériel *M*, de masse *m*, se déplaçant sans frottement sur le plan horizontal $(\vec{i},\vec{j})$ d'un repère $\Re(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. Un opérateur applique une force de module *F* dirigée constamment vers le point *O*. Le point *M* est repéré dans $\Re$ par ses coordonnées polaires ρ et φ (voir la figure ci-dessous).

On suppose que $\rho(t=0)=\rho_0$, $\dot{\rho}(t=0)=\dot{\rho}_0$, $\varphi(t=0)=\varphi_0$, $\dot{\varphi}(t=0)=\dot{\varphi}_0$.

1)- Représenter sur un schéma les forces appliquées sur *M*.

2)- Appliquer le principe fondamental de la dynamique dans $\Re$ et en déduire les deux équations suivantes : $F=-m(\ddot{\rho}-\rho\dot{\varphi}^2)$ (1) et $2\dot{\rho}\dot{\varphi}+\rho\ddot{\varphi}=0$ (2).

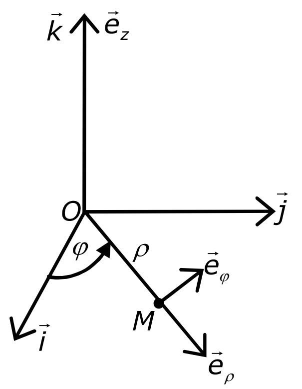
3)- En utilisant l'équation (2), montrer que $\rho^2\dot{\varphi}=A$ où *A* est une constante à déterminer.

4)- On suppose que $\dot{\rho}_0=0$, $\dot{\varphi}_0=0$ et *F* est constant.

a)- Etablir l'équation horaire $\rho(t)$ du mouvement du point *M*.

b)- Calculer le temps t_1 qu'il faut à *M* pour arriver au point *O*.

5)- On suppose que $\dot{\rho}_0\neq 0$, $\dot{\varphi}_0=0$ et $F=0$. Etablir l'équation horaire $\rho(t)$ du mouvement du point *M*.



Correction d'examen 4 (session rattrapage)

<u>Exercice 1</u> :

1)- $\vec{v}(M/\Re) = \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt/\Re} = (2t - 4)\vec{i} - 8t^3\vec{j} + 6t\vec{k}$, $\vec{v}(M/\Re_1) = \dfrac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt/\Re_1} = (2t+1)\vec{i} - 8t^3\vec{j} + 6t\vec{k}$

2)- $\vec{v}(M/\Re) = \vec{v}(M/\Re_1) - 5\vec{i}$

3)- $\vec{\gamma}(M/\Re) = \dfrac{d\vec{v}(M/\Re)}{dt/\Re} = 2\vec{i} - 24t^2\vec{j} + 6\vec{k}$, $\vec{v}(M/\Re_1) = \dfrac{d\vec{v}(M/\Re_1)}{dt/\Re_1} = 2\vec{i} - 24t^2\vec{j} + 6\vec{k}$

$\rightarrow\ \vec{\gamma}(M/\Re) = \vec{\gamma}(M/\Re_1)$

4)- $\vec{\Omega}(\Re_1/\Re) = \vec{0} \rightarrow$ $\Re_1$ est en mouvement de translation par rapport à $\Re$

$$\vec{v}(M/\Re) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt/\Re} = \frac{d\overrightarrow{OO_1}}{dt/\Re} + \frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt/\Re} = \vec{v}(O_1/\Re) + \frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt/\Re_1} + \vec{\Omega}(\Re_1/\Re) \wedge \overrightarrow{O_1M}$$

$$\rightarrow \vec{v}(M/\Re) = \vec{v}(M/\Re_1) + \vec{v}(O_1/\Re) = \vec{v}(M/\Re_1) - 5\vec{i} \rightarrow \vec{v}(O_1/\Re) = -5\vec{i} \rightarrow \left\|\vec{v}(O_1/\Re)\right\| = 5 = cte$$

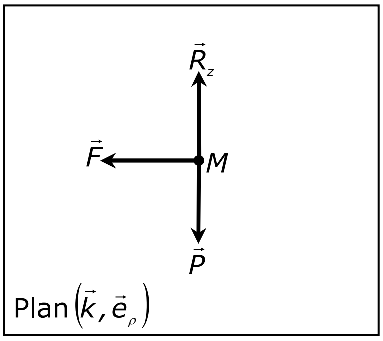
$\rightarrow$ $\Re_1$ est en mouvement de translation uniforme suivant $\vec{i}$ par rapport à $\Re$

5)- Si $\Re$ galiléen, $\Re_1$ est aussi galiléen. Car $\Re_1$ est en mouvement de translation uniforme par rapport à $\Re$.

<u>Exercice 2</u> :

1)- Les forces appliquées sur M sont :

- $\vec{P} = -\mathrm{mg}\vec{k}$: Poids de M
- $\vec{R} = R_Z\vec{k} = \vec{R}_z$: Réaction exercée par le plan (x, y)
  ($R_x = R_y = 0$: Mouvement sans frottement)
- $\vec{F} = -F\vec{e}_\rho$: Force appliquée par un opérateur.



2)- Principe fondamental de la dynamique dans $\Re$:

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{\gamma}(M/\Re) \rightarrow \vec{P} + \vec{R} + \vec{F} = m\vec{\gamma}(M/\Re)$$

$$\overrightarrow{OM} = \rho\vec{e}_\rho \rightarrow \vec{v}(M/\Re) = \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi \rightarrow \vec{\gamma}(M/\Re) = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)\vec{e}_\rho + (2\dot{\rho}\dot{\varphi} + \rho\ddot{\varphi})\vec{e}_\varphi$$

$$\rightarrow (-\mathrm{mg} + R_Z)\vec{e}_z - F\vec{e}_\rho = m(\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)\vec{e}_\rho + m(2\dot{\rho}\dot{\varphi} + \rho\ddot{\varphi})\vec{e}_\varphi$$

$$\rightarrow \begin{cases} R_Z = \mathrm{mg} \\ F = -m(\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2) \\ m(2\dot{\rho}\dot{\varphi} + \rho\ddot{\varphi}) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} F = -m(\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2) & (1) \\ \\ 2\dot{\rho}\dot{\varphi} + \rho\ddot{\varphi} = 0 & (2) \end{cases}$$

3)-.(2) $\rightarrow$ $2\dot{\rho}\dot{\varphi} + \rho\ddot{\varphi} = 0 \rightarrow 2\rho\dot{\rho}\dot{\varphi} + \rho^2\ddot{\varphi} = 0 \rightarrow \dfrac{d(\rho^2\dot{\varphi})}{dt} = 0 \rightarrow \rho^2\dot{\varphi} = A$ (A est une constante)

à $t = 0$, on a $\rho = \rho_0$ et $\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0$ $\rightarrow$ $A = \rho_0^2\dot{\varphi}_0$ $\rightarrow$ $\rho^2\dot{\varphi} = \rho_0^2\dot{\varphi}_0$

4)- On suppose que $\dot{\rho}_0 = 0$, $\dot{\varphi}_0 = 0$ et F est constant.

a) $\dot{\varphi}_0 = 0 \rightarrow \rho^2\dot{\varphi} = 0 \rightarrow \rho = 0$ ou $\dot{\varphi} = 0$. Or $\forall t$ on a $\rho(t) \neq 0 \rightarrow \dot{\varphi} = 0$

Remplaçant $\dot{\varphi} = 0$ dans (1) on trouve : $F = -m\ddot{\rho} \rightarrow \ddot{\rho} = -\dfrac{F}{m}$ avec $F = cte$

$\rightarrow \dot{\rho} = -\dfrac{F}{m}t + C_1 \rightarrow \rho(t) = -\dfrac{F}{2m}t^2 + C_1 t + C_2$

$\dot{\rho}(t=0) = 0 \rightarrow C_1 = 0 \rightarrow \rho(t) = -\dfrac{F}{2m}t^2 + C_2$

$\rho(t=0) = \rho_0 \rightarrow C_2 = \rho_0 \rightarrow \rho(t) = -\dfrac{F}{2m}t^2 + \rho_0$

b)- à $t = t_1$: $M \equiv O \rightarrow \rho(t_1) = -\dfrac{F}{2m}t_1^2 + \rho_0 = 0 \rightarrow t_1^2 = \dfrac{2m\rho_0}{F} \rightarrow t_1 = \sqrt{\dfrac{2m\rho_0}{F}}$

5)- $\dot{\varphi}_0 = 0 \rightarrow \rho^2\dot{\varphi} = 0 \rightarrow \dot{\varphi} = 0 \quad (1) \rightarrow F = -m\ddot{\rho} \rightarrow \ddot{\rho} = -\dfrac{F}{m}$, $F = 0 \rightarrow \ddot{\rho} = 0$

$\rightarrow \dot{\rho} = C_1 \rightarrow \rho(t) = C_1 t + C_2$

$\dot{\rho}(t=0) = C_1 = \dot{\rho}_0$, $\rho(t=0) = C_2 = \rho_0 \rightarrow \rho(t) = \dot{\rho}_0 t + \rho_0$

Examen 5 (Session ordinaire) (durée 2h)

Exercice : (*5 points*)

Les coordonnées d'un point matériel M dans un repère orthonormé direct $R(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ sont données en fonction du temps par : $x(t)=2t+1$, $y(t)=4t(t-1)$ et $z(t)=0$.

1. Déterminer l'équation de la trajectoire de M.

2. Exprimer dans la base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, les vecteurs vitesse et accélération de M.

3. Déduire le rayon de courbure R_c de la trajectoire en fonction du temps.

4. Déterminer les vecteurs de la base de Frenet $(\vec{\tau},\vec{n},\vec{b})$

5. Exprimer dans la base $(\vec{\tau},\vec{n},\vec{b})$, les accélérations tangentielle, $\vec{\gamma}_t$ et normale, $\vec{\gamma}_n$ de M.

Problème : (*15 points*)

On considère le repère fixe $R(Oxyz)$ (repère absolu) muni de la base O.N.D $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, (xOy) étant le plan horizontal. Soit (P) un plan vertical qui tourne autour de (Oz) avec une vitesse angulaire constante ω. On désigne par $R_1(Ox_1y_1z_1)$ le repère relatif muni de la base O.N.D $(\vec{i}_1,\vec{j}_1,\vec{k}_1)$ tel que (x_1Oz_1) se trouve constamment dans le plan (P) et $\vec{k}=\vec{k}_1$ (voir la figure ci-dessous).

Soit (Δ) une tige de longueur L (de vecteur directeur unitaire $\vec{u}_1$) passant par O, constamment contenue dans le plan (P) et faisant un angle α constant avec l'axe (Oz_1) ($0<\alpha<\pi/2$).

Un anneau M de masse m (assimilé à un point matériel) se meut sans frottement le long de la tige (Δ). La position de M sur la tige est définie par : $\overrightarrow{OM}=r(t)\vec{u}_1$.

Soient $\vec{u}_2$ un vecteur unitaire, contenu dans le plan (P) et perpendiculaire à $\vec{u}_1$, et $\vec{u}_3$ un vecteur unitaire tel que la base $(\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3)$ soit O.N.D.

1°)- Exprimer dans la base $(\vec{i}_1,\vec{j}_1,\vec{k}_1)$:

a)-les vecteurs $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ et $\vec{u}_3$.

b)- les vecteurs vitesse et accélération du point M par rapport au repère R_1.

c)- le poids de M et les forces d'inertie.

2°)- Calculer l'énergie cinétique de M par rapport au repère R_1.

3°)- Calculer, en fonction de r, l'énergie potentielle de M par rapport au repère R_1.

4°)- En appliquant le théorème de l'énergie mécanique dans le repère R_1, déterminer l'équation différentielle, du mouvement de M, vérifiée par r.

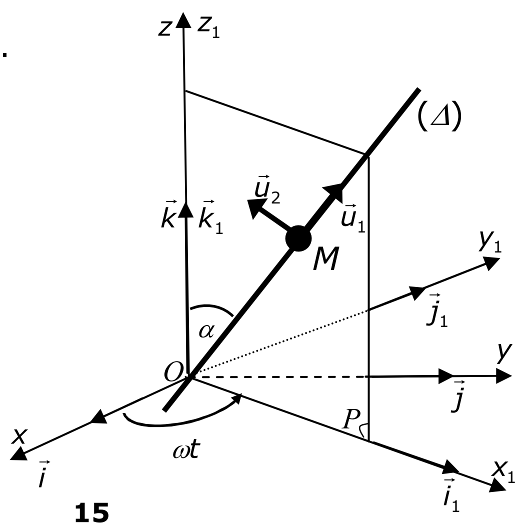
5°)- En appliquant le principe fondamental dans le repère R_1, déterminer les composantes de la réaction $\vec{R}$ exercée par la tige dans la base $(\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3)$.

6°)- Etude de l'équilibre relatif :

a)- Montrer qu'il ne peut exister une position d'équilibre r_{eq} de l'anneau sur la tige que si la vitesse angulaire ω est supérieure à une valeur limite ω_0 que l'on déterminera.

b)- Déterminer la position d'équilibre r_1 de l'anneau sur la tige pour une vitesse angulaire $\omega_1 \geq \omega_0$.

c)- Etudier la stabilité de l'équilibre.



Correction d'examen 5 (session ordinaire)

Exercice :

1. $x = 2t + 1 \rightarrow t = \dfrac{x - 1}{2} \Rightarrow y = x^2 - 4x + 3$

2. $\vec{v}(M/R) = \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt/R} = 2\vec{i} + (8t - 4)\vec{j}$ **,** $\vec{\gamma}(M/R) = \dfrac{d\vec{v}(M/R)}{dt/R} = 8\vec{j}$

3. $R_c = \dfrac{\left\|\vec{v}(M/R)\right\|^3}{\left\|\vec{v}(M/R) \wedge \vec{\gamma}(M/R)\right\|}$ **,** $\left\|\vec{v}(M/R)\right\| = 2\left(16t^2 - 16t + 5\right)^{\frac{1}{2}}$ **,** $\left\|\vec{v}(M/R) \wedge \vec{\gamma}(M/R)\right\| = 16$

$$\Rightarrow R_c = \frac{\left(16t^2 - 16t + 5\right)^{\frac{3}{2}}}{2}$$

4. $\vec{\tau} = \dfrac{\vec{v}(M/R)}{\left\|\vec{v}(M/R)\right\|} \Rightarrow \vec{\tau} = \dfrac{1}{\left(16t^2 - 16t + 5\right)^{\frac{1}{2}}}\vec{i} + \dfrac{4t - 2}{\left(16t^2 - 16t + 5\right)^{\frac{1}{2}}}\vec{j}$

$M \in (xoy) \Rightarrow \quad \vec{b} = \vec{k}$ **,** $\vec{n} = \vec{k} \wedge \vec{\tau} \Rightarrow \quad \vec{n} = \dfrac{2 - 4t}{\left(16t^2 - 16t + 5\right)^{\frac{1}{2}}}\vec{i} + \dfrac{1}{\left(16t^2 - 16t + 5\right)^{\frac{1}{2}}}\vec{j}$

5. $\vec{\gamma}_t = \dfrac{d\left\|\vec{v}(M/R)\right\|}{dt}\vec{\tau} \Rightarrow \vec{\gamma}_t = \dfrac{32t - 16}{\left(16t^2 - 16t + 5\right)^{\frac{1}{2}}}\vec{\tau}$ **,** $\vec{\gamma}_n = \dfrac{\left\|\vec{v}(M/R)\right\|^2}{R_c}\vec{n} \Rightarrow \vec{\gamma}_n = \dfrac{8}{\left(16t^2 - 16t + 5\right)^{\frac{1}{2}}}\vec{n}$

Problème :

1°)-

a)- $\vec{u}_1 = sin(\alpha)\vec{i}_1 + cos(\alpha)\vec{k}_1$, $\vec{u}_2 = -cos(\alpha)\vec{i}_1 + sin(\alpha)\vec{k}_1$ et $\vec{u}_3 = -\vec{j}_1$.

b)- $\vec{v}(M/R_1) = \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt/R_1} = \dfrac{d(r\vec{u}_1)}{dt/R_1} = \dot{r}\, sin(\alpha)\vec{i}_1 + \dot{r}\, cos(\alpha)\vec{k}_1$

$$\vec{\gamma}(M/R_1) = \frac{d\vec{v}(M/R_1)}{dt/R_1} = \ddot{r}\, sin(\alpha)\vec{i}_1 + \ddot{r}\, cos(\alpha)\vec{k}_1$$

c)- $\vec{P} = -mg\vec{k}_1$

$\vec{F}_e = -m\vec{\gamma}_e$ **,** $\vec{\gamma}_e = \vec{\gamma}(O/R) + \dfrac{d\vec{\Omega}(R_1/R)}{dt/R} \wedge \overrightarrow{OM} + \vec{\Omega}(R_1/R) \wedge \left[\vec{\Omega}(R_1/R) \wedge \overrightarrow{OM}\right] = -r\omega^2\, sin(\alpha)\vec{i}_1$

$\vec{\Omega}(R_1/R) = \omega\vec{k}_1 \qquad \Rightarrow \vec{F}_e = mr\omega^2\, sin(\alpha)\vec{i}_1$

$\vec{F}_c = -m\vec{\gamma}_c$ **,** $\vec{\gamma}_c = 2\vec{\Omega}(R_1/R) \wedge \vec{v}(M/R_1) = 2\omega\dot{r}\, sin(\alpha)\vec{j}_1 \Rightarrow \vec{F}_c = -2m\omega\dot{r}\, sin(\alpha)\vec{j}_1$

2°)- $E_c(M/R_1) = \dfrac{1}{2}m\vec{v}(M/R_1)^2 \Rightarrow E_c(M/R_1) = \dfrac{1}{2}m\dot{r}^2$

3°)- $x_1 = r\, sin(\alpha) \rightarrow \vec{F}_e = m\omega^2 x_1\vec{i}_1 \rightarrow \overrightarrow{rot}\vec{F}_e = \vec{0} \Rightarrow \vec{F}_e \rightarrow E_{Pe}$

$dE_{Pe} = -dw\left(\vec{F}_e / R_1\right) = -\vec{F}_e d\overrightarrow{OM} = -m\omega^2 x_1\vec{i}_1\left(dx_1 i_1 + dy_1\vec{j}_1 + dz_1\vec{k}_1\right) = -m\omega^2 x_1 dx_1$

$$\rightarrow\ E_{Pe} = -\frac{1}{2}m\omega^2 {x_1}^2 + Cte \Rightarrow E_{Pe} = -\frac{1}{2}m\omega^2 r^2\ sin^2(\alpha) + Cte$$

$$dE_{Pg} = -dw(\vec{P}/R_1) = -\vec{P}d\overrightarrow{OM} = mg\vec{K}_1(dx_1 i_1 + dy_1\vec{j}_1 + dz_1\vec{k}_1) = mgdz_1$$

$\rightarrow E_{Pg} = mgz_1 + Cte$**,** $z_1 = r\ cos(\alpha) \Rightarrow E_{Pg} = mgr\ cos(\alpha) + Cte$

$$\Rightarrow E_p(M/R_1) = mgr\ cos(\alpha) - \frac{1}{2}m\omega^2 r^2\ sin^2(\alpha) + Cte$$

4°)- $\dfrac{dE_m(M/R_1)}{dt} = P(\vec{F}_{nc}/R_1)$

$\vec{F}_{nc} = \vec{R}$, $\vec{R} = R_1\vec{u}_1 + R_2\vec{u}_2 + R_3\vec{u}_3$, $R_1 = 0$ (sans frottement) $\Rightarrow$ $P(\vec{F}_{nc}/R_1) = 0$

$$E_m(M/R_1) = E_m(M/R_1) + E_m(M/R_1) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + mgr\ cos(\alpha) - \frac{1}{2}m\omega^2 r^2\ sin^2(\alpha) + Cte$$

$$\Rightarrow \frac{dE_m(M/R_1)}{dt} = m\dot{r}\ddot{r} + mg\dot{r}\ cos(\alpha) - m\omega^2 r\dot{r}\ sin^2(\alpha) = 0$$

$$\Rightarrow \ddot{r} + g\ cos(\alpha) - \omega^2 r\ sin^2(\alpha) = 0 \text{ Equ. Diff. du mvt}$$

5°)- $\vec{P} + \vec{R} + \vec{F}_e + \vec{F}_c = m\vec{\gamma}(M/R_1)$

$$-mg\vec{k}_1 + R_2\vec{u}_2 + R_3\vec{u}_3 + mr\omega^2\ sin(\alpha)\vec{i}_1 - 2m\omega\dot{r}\ sin(\alpha)\vec{j}_1 = m\ddot{r}\ sin(\alpha)\vec{i}_1 + m\ddot{r}\ cos(\alpha)\vec{k}_1$$

$$\Rightarrow\ R_1 = 0,\ R_2 = mg\ sin(\alpha) + mr\omega^2\ sin(\alpha)cos(\alpha),\ R_3 = -2m\omega\dot{r}\ sin(\alpha)$$

6°)-

a)- si r_{eq} est position d'équilibre, on aura : $\left.\dfrac{dE_p(M/R_1)}{dr}\right|_{r=r_{eq}} = 0$

$$\rightarrow\ g\ cos(\alpha) - \omega^2 r_{eq}\ sin^2(\alpha) = 0 \rightarrow r_{eq} = \frac{g\ cos(\alpha)}{\omega^2\ sin^2(\alpha)}$$

$$r_{eq} \le L \rightarrow \frac{g\ cos(\alpha)}{\omega^2\ sin^2(\alpha)} \le L \rightarrow \omega \ge \sqrt{\frac{g\ cos(\alpha)}{L\ sin^2(\alpha)}} \Rightarrow\ \omega_0 = \sqrt{\frac{g\ cos(\alpha)}{L\ sin^2(\alpha)}}$$

b)- la position d'équilibre r_1 pour une vitesse angulaire $\omega_1 \ge \omega_0$ est : $r_1 = \dfrac{g\ cos(\alpha)}{{\omega_1}^2\ sin^2(\alpha)}$

c)- $\dfrac{dE_p(M/R_1)}{dr} = mg\ cos(\alpha) - m\omega^2 r\ sin^2(\alpha) \rightarrow \dfrac{d^2E_p(M/R_1)}{dr^2} = -m\omega^2\ sin^2(\alpha) < 0$

$\Rightarrow$ l'équilbre est instable quelque soit r_{eq}

Examen 6 (Session rattrapage) (durée 1h30min)

Exercice : (*4 points*)

Un point matériel M est en mouvement dans le plan (xoy). Les composantes cartésiennes de son vecteur position sont : $x(t) = a\cos(\ln(1+bt))$, $y(t) = a\sin(\ln(1+bt))$ et $z(t) = 0$ où a et b sont des constantes positives non nulles.

1. Exprimer, en fonction du temps, l'abscisse curviligne s, comptée à partir du point $A(a,0,0)$.

2. Déterminer les modules des accélérations tangentielle, $\|\vec{\gamma}_t\|$ et normale, $\|\vec{\gamma}_n\|$.

Problème : (*16 points*)

On considère le repère fixe $R(Oxyz)$ (repère absolu) muni de la base O.N.D $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, ($xOy$) étant le plan horizontal. Soit (P) un plan vertical qui tourne autour de (Oz) avec une vitesse angulaire constante ω. On désigne par $R_1(Ox_1y_1z_1)$ le repère relatif muni de la base O.N.D $(\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$ tel que (x_1Oz_1) se trouve constamment dans le plan (P) et $\vec{k} = \vec{k}_1$ (voir la figure ci-dessous).

Soit (Δ) une tige de longueur L (de vecteur directeur unitaire $\vec{u}_1$) passant par O, constamment contenue dans le plan (P) et faisant un angle α constant avec l'axe (Oz_1) ($0<\alpha<\pi/2$).

Un anneau M de masse m (assimilé à un point matériel) se meut sans frottement le long de la tige (Δ). La position de M sur la tige est définie par : $\overrightarrow{OM} = r(t)\vec{u}_1$.

Soient $\vec{u}_2$ un vecteur unitaire, contenu dans le plan (P) et perpendiculaire à $\vec{u}_1$, et $\vec{u}_3$ un vecteur unitaire tel que la base ($\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$) soit O.N.D.

1°)- Exprimer dans la base $(\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$

a)- le moment cinétique de M au point O par rapport à R_1.

b)- le poids de M.

c)- les forces d'inertie.

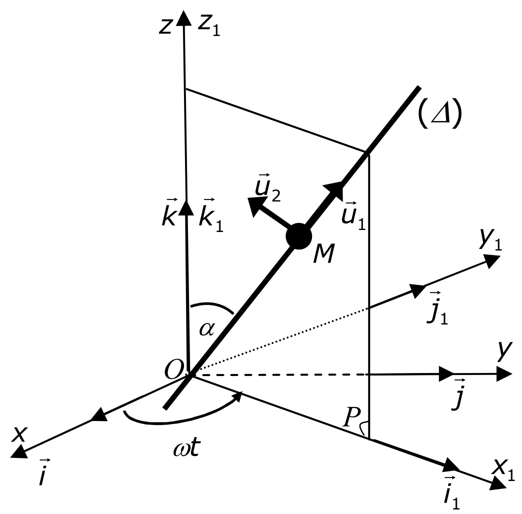
2°)- En appliquant le théorème du moment cinétique dans le repère R_1, déterminer la réaction $\vec{R}$ exercée par la tige sur le point M.

3°)- En appliquant le théorème de l'énergie cinétique dans le repère R_1, déterminer l'équation différentielle, du mouvement de M, vérifiée par r. Donner la solution de cette équation.

4°)- Calculer, en fonction de r, l'énergie potentielle de M par rapport au repère R_1**.**

5°)- Montrer qu'il ne peut exister une position d'équilibre relatif r_{eq} de l'anneau sur la tige que si la vitesse angulaire ω est supérieure à une valeur limite ω_0 que l'on déterminera.

6°)- Quelle doit être la valeur de ω pour que $r = L/2$ soit une position d'équilibre relatif. Etudier la stabilité de cet équilibre.



Correction d'examen 6 (session rattrapage)

Exercice :

1. $x^2 + y^2 = a^2 \rightarrow$ la trajectoire de M est un cercle de rayon a et de centre O.

$\varphi = ln(1+bt) \rightarrow ds(t) = ad\varphi \rightarrow s(t) = a\varphi + cte$

$M \equiv A \rightarrow s = 0$, $x_A = a, y_A = 0 \rightarrow \varphi = 0 \rightarrow cte = 0 \rightarrow s(t) = a\varphi \Longrightarrow s(t) = a\,ln(1+bt)$

2. $\vec{v}(M/R) = \dfrac{ab}{1+bt}\vec{e}_\varphi \rightarrow \|\vec{v}(M/R)\| = \dfrac{ab}{1+bt} \rightarrow \dfrac{d\|\vec{v}(M/R)\|}{dt} = -\dfrac{ab^2}{(1+bt)^2}$

$\vec{\gamma}_t = \dfrac{d\|\vec{v}(M/R)\|}{dt}\vec{\tau} = -\dfrac{ab^2}{(1+bt)^2}\vec{\tau} \Rightarrow \|\vec{\gamma}_t\| = \dfrac{ab^2}{(1+bt)^2}$

$\vec{\gamma}_n = \dfrac{\|\vec{v}(M/R)\|^2}{R_C}\vec{n}$, $R_c = a \rightarrow \vec{\gamma}_n = \dfrac{\left(\dfrac{ab}{1+bt}\right)^2}{a}\vec{n} = \dfrac{ab^2}{(1+bt)^2}\vec{n} \Rightarrow \|\vec{\gamma}_n\| = \dfrac{ab^2}{(1+bt)^2}$

Problème :

1°)- a)- $\vec{\sigma}_O(M/R_1) = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v}(M/R_1)$, $\overrightarrow{OM} = r\vec{u}_1$, $\vec{v}(M/R_1) = \dot{r}\vec{u}_1 \Rightarrow \vec{\sigma}_O(M/R_1) = \vec{0}$

b) $\vec{P} = -mg\vec{k}_1$

c)- $\vec{F}_e = -m\vec{\gamma}_e$, $\vec{\gamma}_e = \underbrace{\vec{\gamma}(O/R) + \dfrac{d\vec{\Omega}(R_1/R)}{dt/R} \wedge \overrightarrow{OM}}_{\vec{0}} + \vec{\Omega}(R_1/R) \wedge \left[\vec{\Omega}(R_1/R) \wedge \overrightarrow{OM}\right] = -r\omega^2 sin(\alpha)\vec{i}_1$

$\vec{\Omega}(R_1/R) = \omega\vec{k}_1 \rightarrow \vec{\gamma}_e = -r\omega^2 sin(\alpha)\vec{i}_1 \quad \Rightarrow \vec{F}_e = mr\omega^2 sin(\alpha)\vec{i}_1$

$\vec{F}_c = -m\vec{\gamma}_c$, $\vec{\gamma}_c = 2\vec{\Omega}(R_1/R) \wedge \vec{v}(M/R_1) = 2\omega\dot{r}\, sin(\alpha)\vec{j}_1 \Rightarrow \vec{F}_c = -2m\omega\dot{r}\, sin(\alpha)\vec{j}_1$

2°)- $\dfrac{d\vec{\sigma}_O(M/R_1)}{dt/R_1} = \vec{m}_O(\vec{P}) + \vec{m}_O(\vec{R}) + \vec{m}_O(\vec{F}_e) + \vec{m}_O(\vec{F}_c)$

$\vec{m}_O(\vec{P}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{P} = (r\,sin(\alpha)\vec{i}_1 + r\,cos(\alpha)\vec{k}_1) \wedge (-mg\vec{k}_1) = mgr\,sin(\alpha)\vec{j}_1 = -mgr\,sin(\alpha)\vec{u}_3$

$\vec{R} = R_1\vec{u}_1 + R_2\vec{u}_2 + R_3\vec{u}_3$ mvt sans frottement $\rightarrow R_1 = 0 \rightarrow \vec{R} = R_2\vec{u}_2 + R_3\vec{u}_3$

$\vec{m}_O(\vec{R}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{R} = r\vec{u}_1 \wedge (R_2\vec{u}_2 + R_3\vec{u}_3) = rR_2\vec{u}_3 - rR_3\vec{u}_2$

$\vec{m}_O(\vec{F}_e) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}_e = (r\,sin(\alpha)\vec{i}_1 + r\,cos(\alpha)\vec{k}_1) \wedge (mr\omega^2 sin(\alpha)\vec{i}_1) = mr^2\omega^2 sin(\alpha)cos(\alpha)\vec{j}_1 = -mr^2\omega^2 sin(\alpha)cos(\alpha)\vec{u}_3$

$\vec{m}_O(\vec{F}_c) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}_c = r\vec{u}_1 \wedge (2m\omega\dot{r}\,sin(\alpha)\vec{u}_3) = -2m\omega r\dot{r}\,sin(\alpha)\vec{u}_2$

$\dfrac{d\vec{\sigma}_O(M/R_1)}{dt/R_1} = \vec{0} \Rightarrow -mgr\,sin(\alpha)\vec{u}_3 + rR_2\vec{u}_3 - rR_3\vec{u}_2 - mr^2\omega^2 sin(\alpha)cos(\alpha)\vec{u}_3 - 2m\omega r\dot{r}\,sin(\alpha)\vec{u}_2 = \vec{0}$

$$\Rightarrow R_2 = mg\,sin(\alpha) + mr\omega^2 sin(\alpha)cos(\alpha),\ R_3 = -2m\omega\dot{r}\,sin(\alpha)$$

3°)- $\dfrac{dE_c(M/R_1)}{dt} = P(\vec{P}/R_1) + P(\vec{R}/R_1) + P(\vec{F}_e/R_1)$

$P(\vec{P}/R_1) = \vec{P}\vec{v}(M/R_1) = -mg\vec{k}_1(\dot{r}\,sin(\alpha)\vec{i}_1 + \dot{r}\,cos(\alpha)\vec{k}_1) = -mg\dot{r}\,cos(\alpha)$

$P(\vec{R}/R_1) = 0$

$P(\vec{F}_e/R_1) = \vec{F}_e\vec{v}(M/R_1) = mr\omega^2 sin(\alpha)\vec{i}_1(\dot{r}\,sin(\alpha)\vec{i}_1 + \dot{r}\,cos(\alpha)\vec{k}_1) = mr\dot{r}\omega^2 sin^2(\alpha)$

$$E_c(M/R_1)=\frac{1}{2}m\vec{v}(M/R_1)^2 \Rightarrow E_c(M/R_1)=\frac{1}{2}m\dot{r}^2 \rightarrow \frac{E_c(M/R_1)}{dt}=m\dot{r}\ddot{r}$$

$$\Rightarrow m\dot{r}\ddot{r}=-mg\dot{r}\cos(\alpha)+mr\dot{r}\omega^2\sin^2(\alpha) \Rightarrow \ddot{r}-\omega^2\sin^2(\alpha)r=-g\cos(\alpha)$$

$$\omega_0{}^2=\omega^2\sin^2(\alpha) \rightarrow \ddot{r}-\omega_0{}^2r=-g\cos(\alpha) \Rightarrow r(t)=Ae^{-\omega_0t}+Be^{\omega_0t}+\frac{g\cos(\alpha)}{\omega_0{}^2}$$

4°)- $x_1=r\sin(\alpha) \rightarrow \vec{F}_e=m\omega^2x_1\vec{i}_1 \rightarrow \overrightarrow{rot}\vec{F}_e=\vec{0} \Rightarrow \vec{F}_e \rightarrow E_{Pe}$

$$dE_{Pe}=-dw(\vec{F}_e/R_1)=-\vec{F}_e d\overrightarrow{OM}=-m\omega^2x_1\vec{i}_1(dx_1i_1+dy_1\vec{j}_1+dz_1\vec{k}_1)=-m\omega^2x_1dx_1$$

$$\rightarrow E_{Pe}=-\frac{1}{2}m\omega^2x_1{}^2+Cte \Rightarrow E_{Pe}=-\frac{1}{2}m\omega^2r^2\sin^2(\alpha)+Cte$$

$$dE_{Pg}=-dw(\vec{P}/R_1)=-\vec{P}d\overrightarrow{OM}=mg\vec{K}_1(dx_1i_1+dy_1\vec{j}_1+dz_1\vec{k}_1)=mgdz_1$$

$\rightarrow E_{Pg}=mgz_1+Cte$ **,** $z_1=r\cos(\alpha) \Rightarrow E_{Pg}=mgr\cos(\alpha)+Cte$

$$\Rightarrow E_p(M/R_1)=mgr\cos(\alpha)-\frac{1}{2}m\omega^2r^2\sin^2(\alpha)+Cte$$

5°)- si r_{eq} est position d'équilibre, on aura : $\left.\frac{dE_p(M/R_1)}{dr}\right|_{r=r_{eq}}=0$

$$\rightarrow g\cos(\alpha)-\omega^2r_{eq}\sin^2(\alpha)=0 \rightarrow r_{eq}=\frac{g\cos(\alpha)}{\omega^2\sin^2(\alpha)}$$

$$r_{eq}\le L \rightarrow \frac{g\cos(\alpha)}{\omega^2\sin^2(\alpha)}\le L \rightarrow \omega\ge\sqrt{\frac{g\cos(\alpha)}{L\sin^2(\alpha)}} \Rightarrow \omega_0=\sqrt{\frac{g\cos(\alpha)}{L\sin^2(\alpha)}}$$

6°)- - $r_{eq}=\frac{L}{2} \rightarrow \frac{L}{2}=\frac{g\cos(\alpha)}{\omega^2\sin^2(\alpha)} \rightarrow \omega=\sqrt{\frac{2g\cos(\alpha)}{L\sin^2(\alpha)}} \Rightarrow \omega=\sqrt{2}\,\omega_0$

$$\frac{dE_p(M/R_1)}{dr}=mg\cos(\alpha)-m\omega^2r\sin^2(\alpha) \rightarrow \frac{d^2E_p(M/R_1)}{dr^2}=-m\omega^2\sin^2(\alpha)<0$$

$\Rightarrow$ l'équilbre est instable

Examen 7 (Session ordinaire) (durée 2h)

Exercice (5 *points*)

On considère un point M en mouvement dans le plan xOy d'un repère O.N.D $\Re(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. M est repéré dans $\Re$ par ses coordonnées polaires suivantes : $\rho = a$ et $\varphi = ln(1+bt)$ où a et b sont des constantes positives non nulles. On désigne par A la position de M qui correspond à $\varphi = 0$.

1. Quelle est l'allure de la trajectoire de M.
2. Exprimer, en fonction du temps, l'abscisse curviligne s de M, comptée à partir du point A.
3. Exprimer dans la base polaire $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi)$, les vecteurs vitesse et accélération de M au point A par rapport au repère $\Re$.
4. Exprimer dans la base polaire $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi)$, les accélérations tangentielle et normale de M.
5. En déduire l'angle entre les vecteurs vitesse et accélération de M.
6. Le mouvement de M est-il accéléré? Justifier votre réponse.

Rappel : $\dfrac{d\,ln(f(x))}{dx} = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$

Problème (15 *points*)

On considère le repère fixe $\Re(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ (repère absolu), (xOy) étant le plan horizontal.

Un cerceau assimilable à un cercle de centre O_1 et de rayon a, situé dans un plan vertical, tourne autour d'une de ses tangentes verticales (Oz) avec une vitesse angulaire ω constante. On désigne par $\Re_1(O_1,\vec{i}_1,\vec{j}_1,\vec{k}_1)$ un repère lié au cerceau (repère relatif) tel que $(x_1O_1z_1)$ étant le plan du cerceau, $(\widehat{\vec{i},\vec{i}_1}) = (\widehat{\vec{j},\vec{j}_1}) = \omega t$ et $\vec{k}_1 = \vec{k}$.

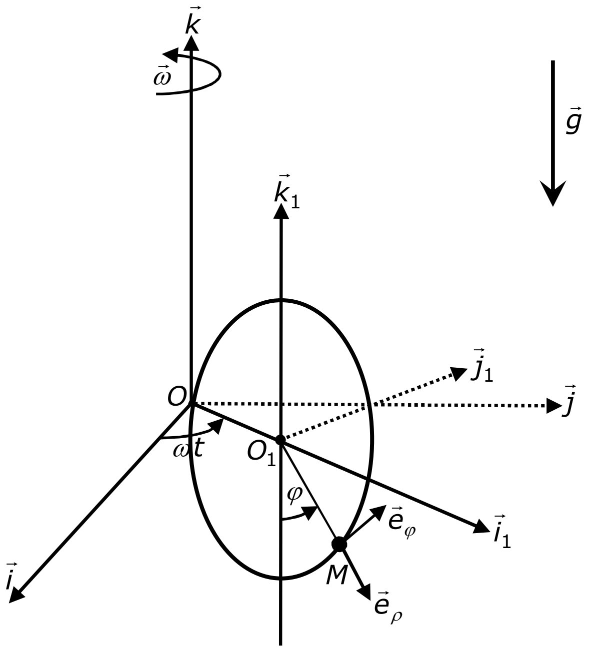
Soit un anneau assimilé à un point matériel M, de masse m, se déplaçant sans frottement sur ce cerceau. Il est repéré dans $\Re_1$ par l'angle φ que fait (O_1M) avec la verticale descendante passant par O_1, φ étant compté positivement dans le sens indiqué sur la figure ci-joint (page 2/2).

1. Exprimer dans la base $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z)$:

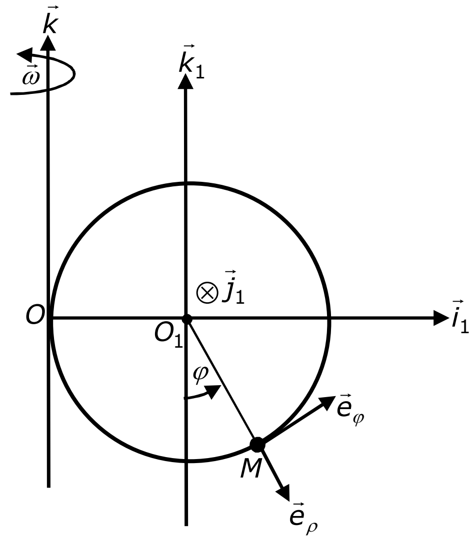
- **a.** les vecteurs de la base $(\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$.
- **b.** le vecteur vitesse du point M par rapport au repère $\Re_1$, $\vec{v}(M/\Re_1)$.
- **c.** le vecteur accélération du point M par rapport au repère $\Re_1$, $\vec{\gamma}(M/\Re_1)$.
- **d.** le moment cinétique de M au point O_1 par rapport au repère $\Re_1$, $\vec{\sigma}_{O_1}(M/\Re_1)$.
- **e.** le poids de M.
- **f.** les forces d'inertie.

2. Calculer l'énergie cinétique de M par rapport au repère $\Re_1$, $E_c(M/\Re_1)$.
3. Calculer, en fonction de φ, l'énergie potentielle de M par rapport au repère $\Re_1$, $E_p(M/\Re_1)$.
On suppose que $E_p(\varphi = 0) = 0$.
4. En appliquant le théorème de l'énergie mécanique dans le repère $\Re_1$, déterminer l'équation différentielle du mouvement vérifiée par φ.
5. En appliquant le théorème de la quantité de mouvement dans le repère $\Re_1$, déterminer les composantes de la réaction $\vec{R}$, exercée sur M par le cerceau, dans la base $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z)$.
6. Etude de l'équilibre relatif :

- **a.** Montrer que l'équation, donnant les positions d'équilibre relatif est :
$$a\omega^2(1+sin(\varphi)) = g\,tan(\varphi)$$
- **b.** Quelle doit être la valeur ω_1 de la vitesse angulaire ω pour que la position qui correspond à $\varphi = \pi/6$ soit une position d'équilibre relatif de M. On donne $a = 0.2m$ *et* $g = 10 m.s^{-2}$
- **c.** Dans ce cas, cet équilibre est-il stable ? Justifier votre réponse



$\vec{k}$
$\vec{\omega}$
$\vec{g}$
$\vec{k}_1$
$\vec{j}_1$
O
$\vec{j}$
ωt
O_1
φ
$\vec{e}_\varphi$
$\vec{i}_1$
$\vec{i}$
M
$\vec{e}_\rho$



$\vec{k}$
$\vec{\omega}$
$\vec{k}_1$
$\otimes \vec{j}_1$
O
O_1
$\vec{i}_1$
φ
$\vec{e}_\varphi$
M
$\vec{e}_\rho$

Correction d'examen 7 (session ordinaire)

<u>Exercice</u> (5 *points*)

1. $\rho = a = cte$ et $\varphi = \varphi(t) \Rightarrow$ la trajectoire de M est un cercle de rayon a et de centre O.

2. $s(t) = a\varphi(t) = a\,ln(1 + b\,t)$ (à $t = 0$: $\varphi = 0, s = 0$)

3. $\vec{v}(M / \Re) = \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt / \Re} = \dfrac{d(a\vec{e}_\rho)}{dt / \Re} = a\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi = \dfrac{ab}{1 + bt}\vec{e}_\varphi$

$$\vec{\gamma}(M / \Re) = \frac{d\vec{v}(M / \Re)}{dt / \Re} = a\ddot{\varphi}\vec{e}_\varphi - a\dot{\varphi}^2\vec{e}_\rho = -\frac{ab^2}{(1 + bt)^2}\vec{e}_\varphi - \frac{ab^2}{(1 + bt)^2}\vec{e}_\rho$$

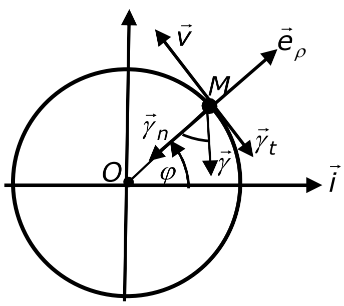
à $t = 0$: $M \equiv A \Rightarrow \vec{v}(M / \Re) = ab\vec{e}_\varphi$ et $\vec{\gamma}(M / \Re) = -ab^2\vec{e}_\varphi - ab^2\vec{e}_\rho$

4. $\vec{\gamma}_t = \dfrac{d\|\vec{v}(M / \Re)\|}{dt}\vec{\tau} = \dfrac{d\dot{s}}{dt}\vec{\tau} = \dfrac{d^2s}{dt^2}\vec{\tau} = -\dfrac{ab^2}{(1 + bt)^2}\vec{\tau}$, $\vec{\gamma}_n = \dfrac{\|\vec{v}(M / \Re)\|^2}{a}\vec{n} = \dfrac{\dot{s}^2}{a}\vec{n} = \dfrac{ab^2}{(1 + bt)^2}\vec{n}$

$\vec{\tau} = \dfrac{\vec{v}(M / \Re)}{\|\vec{v}(M / \Re)\|} = \vec{e}_\varphi$, $\vec{\gamma}_n = \vec{\gamma}(M / \Re) - \vec{\gamma}_t = -\dfrac{ab^2}{(1 + bt)^2}\vec{e}_\rho \Rightarrow \vec{n} = -\vec{e}_\rho$

$\Rightarrow \vec{\gamma}_t = -\dfrac{ab^2}{(1 + bt)^2}\vec{e}_\varphi$, $\vec{\gamma}_n = -\dfrac{ab^2}{(1 + bt)^2}\vec{e}_\rho$

5.



$$tan(\alpha) = \frac{\|\vec{\gamma}_t\|}{\|\vec{\gamma}_n\|} = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \left(\vec{v}\,\hat{,}\,\vec{\gamma}\right) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$$

6. $\vec{v}.\vec{\gamma} = \vec{v}\vec{\gamma}_t = \left(\dfrac{ab}{1 + bt}\vec{e}_\varphi\right)\left(-\dfrac{ab^2}{(1 + bt)^2}\vec{e}_\varphi\right) = -\dfrac{a^2b^3}{(1 + bt)^3} < 0 \Rightarrow$ Le mouvement de M est décéléré.

<u>Problème</u> (15 *points*)

1.

a. $\vec{i}_1 = sin(\varphi)\vec{e}_\rho + cos(\varphi)\vec{e}_\varphi$, $\vec{j}_1 = -\vec{e}_z$, $\vec{k}_1 = -cos(\varphi)\vec{e}_\rho + sin(\varphi)\vec{e}_\varphi$

b. $\vec{v}(M / \Re_1) = \dfrac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt / \Re_1} = \dfrac{d(a\vec{e}_\rho)}{dt / \Re_1} = a\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi$

c. $\vec{\gamma}(M/\Re_1) = \dfrac{d\vec{v}(M/\Re_1)}{dt/\Re_1} = a\ddot{\varphi}\vec{e}_\varphi - a\dot{\varphi}^2\vec{e}_\rho$

d. $\vec{\sigma}_{O_1}(M/\mathscr{R}_1) = \overrightarrow{O_1M} \wedge m\vec{v}(M/\Re_1) = a\vec{e}_\rho \wedge ma\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi = ma^2\dot{\varphi}\vec{e}_z$.

e. $\vec{p} = m\vec{g} = -mg\vec{k}_1 = mg\,cos(\varphi)\vec{e}_\rho - mg\,sin(\varphi)\vec{e}_\varphi$

f. • $\vec{\gamma}_e = \vec{\gamma}(O_1/\Re_1) + \dfrac{d\vec{\Omega}(\Re_1/\Re)}{dt/\Re} \wedge \overrightarrow{O_1M} + \vec{\Omega}(\Re_1/\Re) \wedge \left(\vec{\Omega}(\Re_1/\Re) \wedge \overrightarrow{O_1M}\right)$

$$\vec{v}(O_1/\Re) = \frac{d\overrightarrow{OO_1}}{dt/\Re} = \frac{d(a\vec{i}_1)}{dt/\Re_1} = a\omega\vec{j}_1 \Rightarrow \vec{\gamma}(O_1/\Re) = -a\omega^2\vec{i}_1 = -a\omega^2\,sin(\varphi)\vec{e}_\rho - a\omega^2\,cos(\varphi)\vec{e}_\varphi$$

$$\frac{d\vec{\Omega}(\Re_1/\Re)}{dt/\Re} \wedge \overrightarrow{O_1M} = \vec{0}$$

$$\vec{\Omega}(\Re_1/\Re) \wedge \overrightarrow{O_1M} = \omega\vec{k}_1 \wedge a\vec{e}_\rho = \left(-\omega\,cos(\varphi)\vec{e}_\rho + \omega\,sin(\varphi)\vec{e}_\varphi\right) \wedge a\vec{e}_\rho = -a\omega\,sin(\varphi)\vec{e}_z$$

$$\vec{\Omega}(\Re_1/\Re) \wedge \left(\vec{\Omega}(\Re_1/\Re) \wedge \overrightarrow{O_1M}\right) = \left(-\omega\,cos(\varphi)\vec{e}_\rho + \omega\,sin(\varphi)\vec{e}_\varphi\right) \wedge -a\omega\omega s(\varphi)\vec{e}_z$$
$$= -a\omega^2\,sin(\varphi)cos(\varphi)\vec{e}_\varphi - a\omega^2\,sin^2(\varphi)\vec{e}_\rho$$

$$\Rightarrow \vec{\gamma}_e = -\left(a\omega^2\,sin(\varphi) + a\omega^2\,sin^2(\varphi)\right)\vec{e}_\rho - \left(a\omega^2\,cos(\varphi) + a\omega^2\,sin(\varphi)cos(\varphi)\right)\vec{e}_\varphi$$

$$\Rightarrow \vec{F}_e = -m\vec{\gamma}_e = \left(ma\omega^2\,sin(\varphi) + ma\omega^2\,sin^2(\varphi)\right)\vec{e}_\rho + \left(ma\omega^2\,cos(\varphi) + ma\omega^2\,sin(\varphi)cos(\varphi)\right)\vec{e}_\varphi$$

$$\Rightarrow \vec{F}_e = ma\omega^2\,sin(\varphi)(1 + sin(\varphi))\vec{e}_\rho + ma\omega^2\,cos(\varphi)(1 + sin(\varphi))\vec{e}_\varphi$$

• $\vec{\gamma}_c = 2\vec{\Omega}(\Re_1/\Re) \wedge \vec{v}(M/\Re_1) = 2\left(-\omega\,cos(\varphi)\vec{e}_\rho + \omega\,sin(\varphi)\vec{e}_\varphi\right) \wedge a\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi = -2a\omega\dot{\varphi}\,cos(\varphi)\vec{e}_z$

$$\Rightarrow \vec{F}_c = -m\vec{\gamma}_c = 2ma\omega\dot{\varphi}\,cos(\varphi)\vec{e}_z$$

2. $E_c(M/\mathscr{R}_1) = \dfrac{1}{2}m\vec{v}^2(M/\Re_1) = \dfrac{1}{2}ma^2\dot{\varphi}^2$.

3.

• $\vec{F}_e = ma\omega^2(1 + sin(\varphi))\left(sin(\varphi)\vec{e}_\rho + cos(\varphi)\vec{e}_\varphi\right) = ma\omega^2(1 + sin(\varphi))\vec{i}_1$

$x_1 = a\,sin(\varphi) \Rightarrow \vec{F}_e = m\omega^2(a + x_1)\vec{i}_1$

$$\overrightarrow{rot}\vec{F}_e = \vec{\nabla} \wedge \vec{F}_e = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x_1} & & m\omega^2(a + x_1) \\ \dfrac{\partial}{\partial y_1} & \wedge & 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial z_1} & & 0 \end{vmatrix} = \vec{0} \Rightarrow \vec{F}_e \text{ est conservative dans } \mathscr{R}_1 \Rightarrow \vec{F}_e = -\overrightarrow{grad}E_{pe}$$

E_{pe} énergie potentielle dérivée par $\vec{F}_e$ dans $\mathscr{R}_1 \Rightarrow dE_{pe} = -dw\left(\vec{F}_e/\Re_1\right) = -\vec{F}_e d\overrightarrow{O_1M}$

$\Rightarrow dE_{pe} = -m\omega^2(a + x_1)\vec{i}_1\left(dx_1\vec{i}_1 + dy_1\vec{j}_1 + dz_1\vec{k}_1\right) = -m\omega^2(a + x_1)dx_1$

$$\Rightarrow\ E_{pe} = -ma\omega^2 x_1 - \frac{1}{2} m\omega^2 x_1^2 + cte\ \Rightarrow\ E_{pe} = -ma^2\omega^2 \sin(\varphi) - \frac{1}{2} ma^2\omega^2 \sin^2(\varphi) + cte$$

- $dE_{pg} = -dw\left(\vec{P} / \Re_1\right) = -\vec{P} d\overrightarrow{O_1M} = mg\vec{k}_1\left(dx_1\vec{i}_1 + dy_1\vec{j}_1 + dz_1\vec{k}_1\right) = mgdz_1 \Rightarrow E_{pg} = mgz_1 + cte$

$z_1 = -a\cos(\varphi) \Rightarrow E_{pg} = -mga\cos(\varphi) + cte$: Energie potentielle dérivée par le poids de M.

$$\Rightarrow\ E_p(M/\Re_1) = E_{pe} + E_{pg} = -ma^2\omega^2 \sin(\varphi) - \frac{1}{2} ma^2\omega^2 \sin^2(\varphi) - mga\cos(\varphi) + cte$$

$E_p(\varphi = 0) = 0 \Rightarrow cte = mga$

$$\Rightarrow\ E_p(M/\Re_1) = -ma^2\omega^2 \sin(\varphi) - \frac{1}{2} ma^2\omega^2 \sin^2(\varphi) - mga\cos(\varphi) + mga$$

4. Théorème de l'énergie mécanique dans le repère $\Re_1$:

$\Re_1$ est non galiléen $\Rightarrow \dfrac{dE_m(M/\Re_1)}{dt} = P\left(\vec{F}_{nc} / \Re_1\right)$

$\vec{F}_{nc} = \vec{R} = R_\rho \vec{e}_\rho + R_\varphi \vec{e}_\varphi + R_z \vec{e}_z = R_\rho \vec{e}_\rho + R_z \vec{e}_z$ (mouvement sans frottement : $R_\varphi = 0$)

$$\Rightarrow\ P\left(\vec{F}_{nc} / \Re_1\right) = P\left(\vec{R} / \Re_1\right) = \vec{R}\vec{v}(M/\Re_1) = 0 \Rightarrow \frac{dE_m(M/\Re_1)}{dt} = 0$$

$$E_m(M/\Re_1) = E_c(M/\Re_1) + E_p(M/\Re_1) = \frac{1}{2} ma^2\dot{\varphi}^2 - ma^2\omega^2 \sin(\varphi) - \frac{1}{2} ma^2\omega^2 \sin^2(\varphi) - mga\cos(\varphi) + mga$$

$$\Rightarrow\ \frac{dE_m(M/\Re_1)}{dt} = ma^2\dot{\varphi}\ddot{\varphi} - ma^2\omega^2\dot{\varphi}\cos(\varphi) - ma^2\omega^2\dot{\varphi}\sin(\varphi)\cos(\varphi) + mga\dot{\varphi}\sin(\varphi) = 0$$

$\Rightarrow \ddot{\varphi} = \omega^2 \cos(\varphi) + \omega^2 \sin(\varphi)\cos(\varphi) - \dfrac{g}{a}\sin(\varphi)$: Equation différentielle du mouvement de M.

5. Théorème de la quantité de mouvement dans le repère $\Re_1$:

$\Re_1$ est non galiléen $\Rightarrow m\vec{\gamma}(M/\Re_1) = \vec{P} + \vec{R} + \vec{F}_e + \vec{F}_c$

$\Rightarrow$

$$ma\ddot{\varphi}\vec{e}_\varphi - ma\dot{\varphi}^2\vec{e}_\rho = mg\cos(\varphi)\vec{e}_\rho - mg\sin(\varphi)\vec{e}_\varphi + R_\rho\vec{e}_\rho + R_z\vec{e}_z + ma\omega^2\sin(\varphi)(1+\sin(\varphi))\vec{e}_\rho + ma\omega^2\cos(\varphi)(1+\sin(\varphi))\vec{e}_\varphi + 2ma\omega\dot{\varphi}\cos(\varphi)\vec{e}_z$$

$\Rightarrow$

$$\left(mg\cos(\varphi) + R_\rho + ma\dot{\varphi}^2 + ma\omega^2\sin(\varphi)(1+\sin(\varphi))\right)\vec{e}_\rho - \left(mg\sin(\varphi) + ma\ddot{\varphi} - ma\omega^2\cos(\varphi)(1+\sin(\varphi))\right)\vec{e}_\varphi + \left(R_z + 2ma\omega\dot{\varphi}\cos(\varphi)\right)\vec{e}_z = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} mg\cos(\varphi) + R_\rho + ma\dot{\varphi}^2 + ma\omega^2\sin(\varphi)(1+\sin(\varphi)) = 0 \\ mg\sin(\varphi) + ma\ddot{\varphi} - ma\omega^2\cos(\varphi)(1+\sin(\varphi)) = 0 \\ R_z + 2ma\omega\dot{\varphi}\cos(\varphi) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} R_\rho = -mg\cos(\varphi) - ma\dot{\varphi}^2 - ma\omega^2\sin(\varphi)(1+\sin(\varphi)) \\ R_\varphi = 0 \\ R_z = -2ma\omega\dot{\varphi}\cos(\varphi) \end{cases}$$

Composantes de la réaction $\vec{R}$, exercée sur M par le cerceau, dans la base $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z)$.

6. Etude de l'équilibre relatif :

a. Les positions d'équilibre relatif sont des positions où $\frac{dE_p(M/\Re_1)}{d\varphi} = 0$ c'est-à-dire :

$$-ma^2\omega^2 \cos(\varphi) - ma^2\omega^2 \sin(\varphi)\cos(\varphi) + mga\sin(\varphi) = 0$$

$$\Rightarrow -a\omega^2 \cos(\varphi) - a\omega^2 \sin(\varphi)\cos(\varphi) + g\sin(\varphi) = 0 \Rightarrow a\omega^2(-1 - \sin(\varphi))\cos(\varphi) + g\sin(\varphi) = 0$$

$$\Rightarrow a\omega^2(1 + \sin(\varphi)) = g\frac{\sin(\varphi)}{\cos(\varphi)} \quad \Rightarrow \quad a\omega^2(1 + \sin(\varphi)) = g\tan(\varphi)$$

b. La position qui correspond à $\varphi = \pi/6$ est une position d'équilibre relatif, donc :

$$a\omega_1^2\left(1 + \sin(\frac{\pi}{6})\right) = g\tan(\frac{\pi}{6}) \Rightarrow a\omega_1^2\left(1 + \frac{1}{2}\right) = g\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{3}{2}a\omega_1^2 = g\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \omega_1^2 = \frac{2\sqrt{3}}{9}\frac{g}{a}$$

$$\Rightarrow \omega_1 = \frac{1}{3}\sqrt{2\sqrt{3}\frac{g}{a}} \Rightarrow \omega_1 = \frac{1}{3}\sqrt{2\sqrt{3}\frac{10}{0.2}} = \frac{1}{3}\sqrt{10^2\sqrt{3}} = \frac{10}{3}\sqrt{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \omega_1 = 4.387 rad.s^{-1}$$

c.

$$\omega = \omega_1 \Rightarrow E_p(M/\Re_1) = -ma^2\omega_1^2 \sin(\varphi) - \frac{1}{2}ma^2\omega_1^2 \sin^2(\varphi) - mga\cos(\varphi) + mga$$

$$\frac{dE_p(M/\Re_1)}{d\varphi} = -ma^2\omega_1^2 \cos(\varphi) - ma^2\omega_1^2 \sin(\varphi)\cos(\varphi) + mga\sin(\varphi)$$

$$\Rightarrow \frac{d^2E_p(M/\Re_1)}{d\varphi^2} = ma^2\omega_1^2 \sin(\varphi) - ma^2\omega_1^2 \cos^2(\varphi) + ma^2\omega_1^2 \sin^2(\varphi) + mga\cos(\varphi)$$

$$\Rightarrow \left.\frac{d^2E_p(M/\Re_1)}{d\varphi^2}\right|_{\varphi=\frac{\pi}{6}} = ma^2\omega_1^2 \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) - ma^2\omega_1^2 \cos^2\left(\frac{\pi}{6}\right) + ma^2\omega_1^2 \sin^2\left(\frac{\pi}{6}\right) + mga\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\Rightarrow \left.\frac{d^2E_p(M/\Re_1)}{d\varphi^2}\right|_{\varphi=\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{2}ma^2\omega_1^2 - \frac{3}{4}ma^2\omega_1^2 + \frac{1}{4}ma^2\omega_1^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}mga$$

$$\omega_1^2 = \frac{2\sqrt{3}}{9}\frac{g}{a} \Rightarrow \left.\frac{d^2E_p(M/\Re_1)}{d\varphi^2}\right|_{\varphi=\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{2}ma^2\frac{2\sqrt{3}}{9}\frac{g}{a} - \frac{3}{4}ma^2\frac{2\sqrt{3}}{9}\frac{g}{a} + \frac{1}{4}ma^2\frac{2\sqrt{3}}{9}\frac{g}{a} + \frac{\sqrt{3}}{2}mga$$

$$\Rightarrow \left.\frac{d^2E_p(M/\Re_1)}{d\varphi^2}\right|_{\varphi=\frac{\pi}{6}} = \sqrt{3}mag\left(\frac{1}{9} - \frac{1}{6} + \frac{1}{18} + \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}mag$$

$\left.\frac{d^2E_p(M/\Re_1)}{d\varphi^2}\right|_{\varphi=\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2}mag > 0 \Rightarrow$ si $\omega = \omega_1$, l'équilibre en $\varphi = \pi/6$ est stable.

Examen 8 (Session rattrapage) (durée 1h15min)

On considère le repère fixe $\Re(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ (repère absolu), (x*Oy*) étant le plan horizontal.

Un cerceau assimilable à un cercle de centre *O* et de rayon *R*, situé dans un plan vertical, tourne autour de l'axe vertical (*Oz*) avec une vitesse angulaire ω constante. On désigne par $\Re_1(O,\vec{i}_1,\vec{j}_1,\vec{k}_1)$ un repère lié au cerceau (repère relatif) tel que (x_1Oz_1) étant le plan du cerceau, $(\vec{i}\,\hat{,}\,\vec{i}_1) = (\vec{j}\,\hat{,}\,\vec{j}_1) = \omega t$ et $\vec{k} = \vec{k}_1$.

($\vec{i},\vec{j},\vec{i}_1$ et $\vec{j}_1$ se trouvent dans le même plan horizontal (x*Oy*). $\vec{\Omega}(\Re_1/\Re) = \omega\vec{k}$ est le vecteur de rotation du repère $\Re_1$ par rapport au repère $\Re$).

Soit un anneau assimilé à un point matériel *M*, de masse *m*, se déplaçant sans frottement sur ce cerceau. Il est repéré dans $\Re_1$ par l'angle φ que fait (*OM*) avec la verticale descendante passant par *O*, φ étant compté positivement dans le sens indiqué sur la figure ci-dessous.

1). Exprimer dans la base $(\vec{e}_\rho,\vec{e}_\varphi,\vec{e}_z)$:

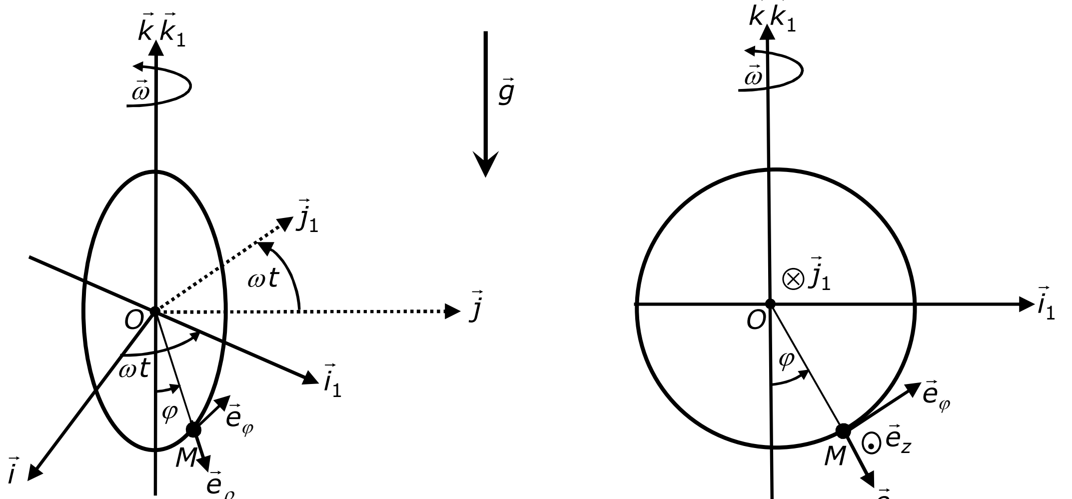
- **a.** le poids de *M*, $\vec{P}$, et son moment par rapport au point *O*, $\vec{m}_O(\vec{P})$.
- **b.** la force d'inertie d'entraînement, $\vec{F}_e$, et son moment par rapport au point *O*, $\vec{m}_O(\vec{F}_e)$.
- **c.** la force d'inertie de Coriolis, $\vec{F}_c$, et son moment par rapport au point *O*, $\vec{m}_O(\vec{F}_c)$.

2). En appliquant le théorème du moment cinétique dans le repère $\Re_1$, déterminer l'équation différentielle du mouvement vérifiée par φ.

3). Calculer, en fonction de φ, l'énergie potentielle de *M* par rapport au repère $\Re_1$, $E_p(M/\Re_1)$. On suppose que $E_p(\varphi = 0) = 0$.

4). On donne $\omega = 10 rad/s$, $R = 0.2 m$ et $g = 10 m.s^{-2}$

- **a.** Déterminer dans ce cas, les positions d'équilibre relatif de *M*.
- **b.** Etudier leur stabilité.



Correction d'examen 8 (session rattrapage)

1.

a. • $\vec{p} = m\vec{g} = -mg\vec{k}_1 = mg\cos(\varphi)\vec{e}_\rho - mg\sin(\varphi)\vec{e}_\varphi$

• $\vec{m}_O(\vec{P}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{P} = R\vec{e}_\rho \wedge (mg\cos(\varphi)\vec{e}_\rho - mg\sin(\varphi)\vec{e}_\varphi) = -mgR\sin(\varphi)\vec{e}_z$

b. • $\vec{\gamma}_e = \underbrace{\vec{\gamma}(O/\Re) + \frac{d\vec{\Omega}(\Re_1/\Re)}{dt/\Re} \wedge \overrightarrow{OM}}_{\vec{0}} + \vec{\Omega}(\Re_1/\Re) \wedge \left(\vec{\Omega}(\Re_1/\Re) \wedge \overrightarrow{OM}\right)$

$\vec{\Omega}(\Re_1/\Re) \wedge \overrightarrow{OM} = \omega\vec{k} \wedge R\vec{e}_\rho = (-\omega\cos(\varphi)\vec{e}_\rho + \omega\sin(\varphi)\vec{e}_\varphi) \wedge R\vec{e}_\rho = -R\omega\sin(\varphi)\vec{e}_z$

$$\vec{\Omega}(\Re_1/\Re) \wedge \left(\vec{\Omega}(\Re_1/\Re) \wedge \overrightarrow{OM}\right) = (-\omega\cos(\varphi)\vec{e}_\rho + \omega\sin(\varphi)\vec{e}_\varphi) \wedge -R\omega\sin(\varphi)\vec{e}_z$$
$$= -R\omega^2\sin(\varphi)\cos(\varphi)\vec{e}_\varphi - R\omega^2\sin^2(\varphi)\vec{e}_\rho$$

$$\Rightarrow \vec{\gamma}_e = -R\omega^2\sin(\varphi)\cos(\varphi)\vec{e}_\varphi - R\omega^2\sin^2(\varphi)\vec{e}_\rho$$

$$\Rightarrow \vec{F}_e = mR\omega^2\sin^2(\varphi)\vec{e}_\rho + mR\omega^2\sin(\varphi)\cos(\varphi)\vec{e}_\varphi$$

• $\vec{m}_O(\vec{F}_e) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}_e = R\vec{e}_\rho \wedge (mR\omega^2\sin^2(\varphi)\vec{e}_\rho + mR\omega^2\sin(\varphi)\cos(\varphi)\vec{e}_\varphi)$

$$\Rightarrow \vec{m}_O(\vec{F}_e) = mR^2\omega^2\sin(\varphi)\cos(\varphi)\vec{e}_z$$

c. • $\vec{\gamma}_c = 2\vec{\Omega}(\Re_1/\Re) \wedge \vec{v}(M/\Re_1) = 2(-\omega\cos(\varphi)\vec{e}_\rho + \omega\sin(\varphi)\vec{e}_\varphi) \wedge R\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi = -2R\omega\dot{\varphi}\cos(\varphi)\vec{e}_z$

$$\Rightarrow \vec{F}_c = 2mR\omega\dot{\varphi}\cos(\varphi)\vec{e}_z$$

• $\vec{m}_O(\vec{F}_c) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}_e = R\vec{e}_\rho \wedge 2mR\omega\dot{\varphi}\cos(\varphi)\vec{e}_z = -2mR^2\omega\dot{\varphi}\cos(\varphi)\vec{e}_\varphi$

2. $\Re_1$ est non galiléen et O est fixe dans $\Re_1 \Rightarrow \frac{d\vec{\sigma}_O(M/\Re_1)}{dt/\Re_1} = \vec{m}_O(\vec{P}) + \vec{m}_O(\vec{R}) + \vec{m}_O(\vec{F}_e) + \vec{m}_O(\vec{F}_c)$

$\vec{\sigma}_O(M/\Re_1) = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v}(M/\Re_1) = R\vec{e}_\rho \wedge mR\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi = mR^2\dot{\varphi}\vec{e}_z \Rightarrow \frac{d\vec{\sigma}_O(M/\Re_1)}{dt/\Re_1} = mR^2\ddot{\varphi}\vec{e}_z$

$\vec{R} = R_\rho\vec{e}_\rho + R_\varphi\vec{e}_\varphi + R_z\vec{e}_z = R_\rho\vec{e}_\rho + R_z\vec{e}_z$ (mouvement sans frottement : $R_\varphi = 0$)

$$\Rightarrow \vec{m}_O(\vec{R}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{R} = R\vec{e}_\rho \wedge (R_\rho\vec{e}_\rho + R_z\vec{e}_z) = -RR_z\vec{e}_\varphi$$

$$\Rightarrow mR^2\ddot{\varphi}\vec{e}_z = -mgR\sin(\varphi)\vec{e}_z - RR_z\vec{e}_\varphi + mR^2\omega^2\sin(\varphi)\cos(\varphi)\vec{e}_z - 2mR^2\omega\dot{\varphi}\cos(\varphi)\vec{e}_\varphi$$

$\Rightarrow \ddot{\varphi} + \frac{g}{R}\sin(\varphi) - \omega^2\sin(\varphi)\cos(\varphi) = 0$: Equation différentielle du mouvement de *M.*

3. • $\vec{F}_e = mR\omega^2\sin(\varphi)(\sin(\varphi)\vec{e}_\rho + \cos(\varphi)\vec{e}_\varphi) = mR\omega^2\sin(\varphi)\vec{i}_1$, $x_1 = R\sin(\varphi) \Rightarrow \vec{F}_e = m\omega^2 x_1\vec{i}_1$

$\Rightarrow \overrightarrow{rot}\vec{F}_e = \vec{0} \Rightarrow \vec{F}_e$ est conservative dans $\Re_1 \Rightarrow \vec{F}_e = -\overrightarrow{grad}E_{pe}$

E_{pe} énergie potentielle dérivée par $\vec{F}_e$ dans $\Re_1 \Rightarrow dE_{pe} = -dw(\vec{F}_e/\Re_1) = -\vec{F}_e d\overrightarrow{OM} = -m\omega^2 x_1 dx_1$

$\Rightarrow E_{pe} = -\frac{1}{2}m\omega^2 x_1^2 + cte \Rightarrow E_{pe} = -\frac{1}{2}mR^2\omega^2\sin^2(\varphi) + cte$

• $dE_{pg} = -dw(\vec{P}/\Re_1) = -\vec{P}d\overrightarrow{OM} = mgdz_1 \Rightarrow E_{pg} = mgz_1 + cte$

$z_1 = -R\cos(\varphi) \Rightarrow E_{pg} = -mgR\cos(\varphi) + cte$: Energie potentielle dérivée par le poids de M.

$\Rightarrow E_p(M/\Re_1) = E_{pe} + E_{pg} = -\frac{1}{2}mR^2\omega^2 \sin^2(\varphi) - mgR\cos(\varphi) + cte$

$E_p(\varphi = 0) = 0 \Rightarrow cte = mgR$

$$\Rightarrow E_p(M/\Re_1) = -\frac{1}{2}mR^2\omega^2 \sin^2(\varphi) - mgR\cos(\varphi) + mgR$$

4. Etude de l'équilibre relatif : cas où $\omega = 10 rad/s$, $R = 0.2m$ et $g = 10 m.s^{-2}$

a. Les positions d'équilibre relatif sont des positions où $\frac{dE_p(M/\Re_1)}{d\varphi} = 0$ c'est-à-dire :

$$-mR^2\omega^2 \sin(\varphi)\cos(\varphi) + mgR\sin(\varphi) = 0$$

$$\Rightarrow \sin(\varphi) = 0 \text{ ou } \cos(\varphi) = \frac{g}{R\omega^2} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \varphi = 0 \text{ ou } \varphi = \pi \text{ ou } \varphi = \frac{\pi}{3} \text{ ou } \varphi = \frac{5\pi}{3}$$

$\Rightarrow$ 4 positions d'équilibre relatif de M : $M_1(R,0)$, $M_2(R,\pi)$, $M_3\left(R,\frac{\pi}{3}\right)$ et $M_4\left(R,\frac{5\pi}{3}\right)$

en coordonnées polaires.

b. Etude de la stabilité d'équilibre relatif :

$$\frac{d^2E_p(M/\Re_1)}{d\varphi^2} = -mR^2\omega^2\cos^2(\varphi) + mR^2\omega^2\sin^2(\varphi) + mgR\cos(\varphi)$$

- $\left.\frac{d^2E_p(M/\Re_1)}{d\varphi^2}\right|_{\varphi=0} = -mR^2\omega^2 + mgR = -2m < 0 \Rightarrow$ Equilibre instable.
- $\left.\frac{d^2E_p(M/\Re_1)}{d\varphi^2}\right|_{\varphi=\pi} = -mR^2\omega^2 - mgR = -6m < 0 \Rightarrow$ Equilibre instable.
- $\left.\frac{d^2E_p(M/\Re_1)}{d\varphi^2}\right|_{\varphi=\frac{\pi}{3}} = \frac{-mR^2\omega^2}{4} + \frac{3mR^2\omega^2}{4} + \frac{mgR}{2} = 3m > 0 \Rightarrow$ Equilibre stable.
- $\left.\frac{d^2E_p(M/\Re_1)}{d\varphi^2}\right|_{\varphi=\frac{5\pi}{3}} = \frac{-mR^2\omega^2}{4} + \frac{3mR^2\omega^2}{4} + \frac{mgR}{2} = 3m > 0 \Rightarrow$ Equilibre stable.

Examen 9 (Session ordinaire) (durée 2h)

Questions de cours : (3 *points*)

1) Dans un référentiel galiléen, on considère un point matériel soumis à plusieurs forces, certaines sont conservatives et d'autres non conservatives. A quoi est égale la variation de l'énergie cinétique et la variation de l'énergie mécanique entre deux points arbitraires de la trajectoire.

2) Montrer que si le module de la vitesse d'un mobile est constant alors son vecteur vitesse est perpendiculaire à son vecteur accélération.

3) Montrer que si une force $\vec{F}$ dérive d'une énergie potentielle $E_P(x,y,z)$, alors le travail de $\vec{F}$ entre deux points quelconques est indépendant du chemin suivi.

Exercice1 : (5 *points*)

Un point matériel M est en mouvement dans le plan (xoy). Les composantes cartésiennes de son vecteur vitesse sont : $v_x = R\omega \cos(\omega t)$ et $v_y = R\omega \sin(\omega t)$ où R et ω sont des constantes réelles et positives. A l'instant t = 0, le point M se trouve à l'origine O(0,0).

1) Déterminer les composantes cartésiennes du vecteur accélération.

2) Déterminer les accélérations tangentielle, $\vec{\gamma}_t$, et normale, $\vec{\gamma}_n$, du point M.

3) Déduire le rayon de courbure, R_c, de la trajectoire.

4) Déterminer les composantes $x(t)$ et $y(t)$ du vecteur position $\overrightarrow{OM}$

5) Déduire l'équation de la trajectoire. Quelle est la nature du mouvement ?

Exercice2 : (6 *points*)

On considère un point matériel M de masse m astreint à se déplacer, avec frottement, sur un axe (Ox) horizontal de vecteur unitaire $\vec{i}$. Soit $\vec{R}_t = -\alpha v^2 \vec{i}$ la composante tangentielle de la réaction $\vec{R}$, exercée sur M par l'axe (Ox), α étant une constante positive et v la vitesse instantanée. A l'instant t = 0, le point M se trouve à l'origine O avec une vitesse v_0 positive.

1) Déterminer l'unité de α.

2) En appliquant le principe fondamental de la dynamique, montrer que $\frac{dv}{v^2} = -\frac{\alpha}{m} dt$.

3) Déterminer l'expression de la vitesse $v(t)$ du point M, en fonction de t, m, α et v_0.

4) Déduire l'expression de la position $x(t)$ du point M, en fonction de t, m, α et v_0.

5) A quel instant t, le point M **a)** perdra la moitié de sa vitesse initiale ? **b)** s'arrêtera ?

6) Calculer le travail de la réaction $\vec{R}$, lorsque le point M perd la moitié de sa vitesse.

Exercice3 : (3 *points*)
Sur la trajectoire de la figure 1, un point matériel *M* de masse m=3kg est abandonné sans vitesse initiale du point *A* et parvient au point *B* avec une vitesse v_B=6m/s. La différence d'altitudes entre *A* et *B* est h=2m. On donne g=10m/s^2 et on suppose que l'énergie potentielle est nulle en *B*.

1) Montrer que *M* est soumis à des forces de frottement (on calcule l'énergie mécanique en *A* et *B*).

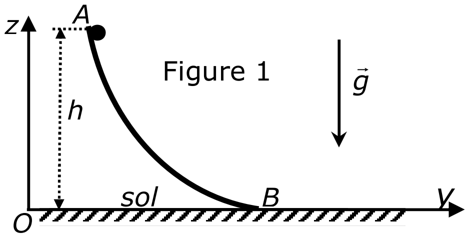
2) Déduire le travail de ces forces entre *A* et *B* (on exprime ce travail en Joules).

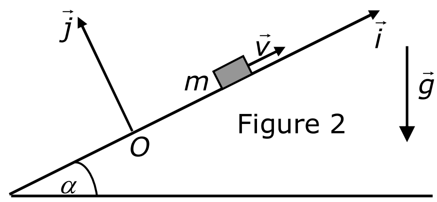
Exercice4 : (3 *points*)
Une boîte considérée ponctuelle de masse m=5kg se trouve sur un plan incliné faisant un angle α=30° avec l'horizontale. Le coefficient de frottement dynamique entre les surfaces en contact est k_d=0.3. A partir d'un point *O*, on lance la boîte vers le haut avec une vitesse initiale v_0=2m/s (voir figure 2). On donne g=10m/s^2.

1) En appliquant le principe fondamental de la dynamique, calculer en m/s^2 l'accélération de la boîte.

2) Quelle est, en mètre, la distance parcourue par la boîte avant de s'arrêter ?

3) Quelle est la valeur minimale du coefficient de frottement statique k_s pour que la boîte, une fois arrêtée, ne reparte pas en arrière?





Correction d'examen 9 (session ordinaire)

Questions de cours : (3 *points*)

1)

– Dans référentiel galiléen, la variation de l'énergie cinétique entre deux points arbitraires de la trajectoire est égale à la somme des travaux des forces extérieures appliquées sur le point matériel.

- Dans référentiel galiléen, la variation de l'énergie mécanique entre deux points arbitraires de la trajectoire est égale à la somme des travaux des forces non conservatives appliquées sur le point matériel.

2) $\|\vec{v}\| = cte \quad \to \quad \|\vec{v}\|^2 = \vec{v}^2 = cte \quad \to \quad \frac{d\vec{v}^2}{dt} = 2\vec{v}\frac{d\vec{v}}{dt} = 2\vec{v}\vec{\gamma} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{v}\vec{\gamma} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{v} \perp \vec{\gamma}$

3) $\vec{F}$ dérive d'une énergie potentielle $E_P(x,y,z) \to \vec{F} = -\overrightarrow{grad}E_P$

$\underset{A\to B}{W(\vec{F})} = \int_A^B \vec{F}d\overrightarrow{OM} = \int_A^B -\overrightarrow{grad}E_P d\overrightarrow{OM} = -\int_A^B dE_P \quad \Rightarrow \quad \underset{A\to B}{W(\vec{F})} = E_P(A) - E_P(B) \quad \Rightarrow$ le travail de $\vec{F}$ entre deux points quelconques A et B est indépendant du chemin suivi.

Exercice1 : (5 *points*)

1) $\gamma_x = \frac{dv_x}{dt} = -R\omega^2 \ sin(\omega t)$ et $\gamma_y = \frac{dv_y}{dt} = R\omega^2 \ cos(\omega t)$

2) - $\vec{\gamma}_t = \frac{d\|\vec{v}\|}{dt}\vec{\tau}$, $\|\vec{v}\| = \sqrt{v_x^{\ 2} + v_y^{\ 2}} = R\omega \quad \to \quad \frac{d\|\vec{v}\|}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{\gamma}_t = \vec{0}$ (accélération tangentielle)

- $\vec{\gamma}_n = \vec{\gamma} - \vec{\gamma}_t = \vec{\gamma} \quad \Rightarrow \quad \vec{\gamma}_n = -R\omega^2 \ sin(\omega t)\vec{\mathrm{i}} + R\omega^2 \ cos(\omega t)\vec{\mathrm{j}}$ (accélération normale)

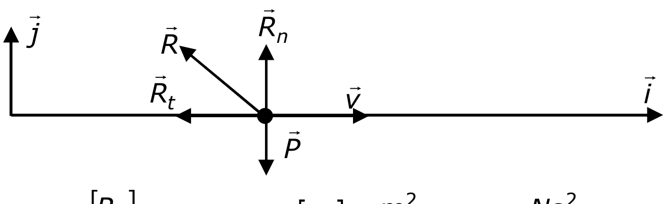
3) $\vec{\gamma}_n = \frac{\|\vec{v}\|^2}{R_C}\vec{n} \to \|\vec{\gamma}_n\| = \frac{\|\vec{v}\|^2}{R_C} \Rightarrow R_C = \frac{\|\vec{v}\|^2}{\|\vec{\gamma}_n\|}$, $\|\vec{\gamma}_n\| = R\omega^2 \Rightarrow R_C = \frac{R^2\omega^2}{R\omega^2} \Rightarrow R_C = R$ (rayon de courbure)

4) - $\frac{dx}{dt} = v_x = R\omega \ cos(\omega t) \to x = R sin(\omega t) + \text{cte}$, $x(0) = 0 \to cte = 0 \quad \Rightarrow \quad x = R sin(\omega t)$.

- $\frac{dy}{dt} = v_y = R\omega \ sin(\omega t) \to \mathrm{y} = -R cos(\omega t) + \text{cte}$, $y(0) = 0 \to cte = R \quad \Rightarrow \quad y = R[1 - cos(\omega t)]$.

5) $x^2 + (y-R)^2 = R^2 sin^2(\omega t) + R^2 cos^2(\omega t) \quad \Rightarrow \quad x^2 + (y-R)^2 = R^2$: Equation caractéristique d'un cercle de rayon R et de centre $C(0,R)$ $\Rightarrow$ le mouvement est circulaire (la trajectoire est un cercle de rayon R et de centre $C(0,R)$).

Exercice2 : (6 *points*)



1) $R_t = \|\vec{R}_t\| = \alpha v^2 \to [R_t] = [\alpha][v^2] \Rightarrow [\alpha] = \frac{[R_t]}{[v^2]}, [R_t] = N$ et $[v^2] = \frac{m^2}{s^2} \Rightarrow [\alpha] = \frac{Ns^2}{m^2}, N = kg\frac{m}{s^2}$

$$\Rightarrow [\alpha] = \frac{kg}{m}$$

2) P.F.D $\Rightarrow \quad \vec{P} + \vec{R} = m\vec{\gamma} \to -mg\vec{j} + \vec{R}_n + \vec{R}_t = m\gamma_x\vec{i} + m\gamma_y\vec{j}$, $\gamma_y = 0$

$$\Rightarrow \quad \vec{R}_n = mg\vec{j} \quad \text{et} \quad \vec{R}_t = m\gamma_x\vec{i}$$

$\gamma_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{dv}{dt} \to \vec{R}_t = m\frac{dv}{dt}\vec{i} = -\alpha v^2\vec{i} \Rightarrow m\frac{dv}{dt} = -\alpha v^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{v^2} = -\frac{\alpha}{m}dt$

3) $\frac{dv}{v^2} = -\frac{\alpha}{m}dt \rightarrow \int -\frac{dv}{v^2} = \frac{\alpha}{m}\int dt + \text{cte} \Rightarrow \frac{1}{v} = \frac{\alpha}{m}t + \text{cte}\ ,\ v(0) = v_0 \rightarrow cte = \frac{1}{v_0}$

$$\Rightarrow \frac{1}{v} = \frac{\alpha}{m}t + \frac{1}{v_0}$$

$\Rightarrow \quad v(t) = \frac{mv_0}{m + \alpha v_0 t}$ ou $v(t) = \frac{v_0}{1 + \frac{\alpha}{m}v_0 t}$

4) $\frac{dx}{dt} = v = \frac{v_0}{1 + \frac{\alpha}{m}v_0 t} \rightarrow x = \int \frac{v_0}{1 + \frac{\alpha}{m}v_0 t}dt + \text{cte} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{m}{\alpha}ln(1 + \frac{\alpha}{m}v_0 t) + \text{cte}$

$x(0) = 0 \rightarrow \text{cte} = 0 \quad \Rightarrow \quad x(t) = \frac{m}{\alpha}ln(1 + \frac{\alpha}{m}v_0 t)$

5) a) M perdra la moitié de sa vitesse initiale c-à-d : $v = \frac{v_0}{2}$. Soit t_1 l'instant où $v = \frac{v_0}{2}$.

$\Rightarrow \quad v(t_1) = \frac{v_0}{1 + \frac{\alpha}{m}v_0 t_1} = \frac{v_0}{2} \rightarrow \frac{1}{2}\left[1 + \frac{\alpha}{m}v_0 t_1\right] = 1 \rightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{\alpha}{m}v_0 t_1 = 1 \rightarrow \frac{\alpha}{m}v_0 t_1 = 1$

$$\Rightarrow \quad t_1 = \frac{m}{\alpha v_0}$$

b) M s'arrêtera c-à-d : $v = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{v_0}{1 + \frac{\alpha}{m}v_0 t} = 0 \quad \Rightarrow \quad 1 + \frac{\alpha}{m}v_0 t \rightarrow \infty \quad \Rightarrow \quad t \rightarrow \infty$

6) Soit A la position où le point M perd la moitié de sa vitesse initiale c-à-d $v_A = \frac{v_0}{2}$.

Théorème de l'énergie cinétique entre les points O et A → $E_C(A) - E_C(O) = \underset{O\rightarrow A}{W(\vec{P})} + \underset{O\rightarrow A}{W(\vec{R})}$

$\Rightarrow \quad \underset{O\rightarrow A}{W(\vec{R})} = E_C(A) - E_C(O) - \underset{O\rightarrow A}{W(\vec{P})}$

$\underset{O\rightarrow A}{W(\vec{P})} = \int_O^A \vec{P}d\overrightarrow{OM} = \int_O^A -mg\vec{j}\,dx\vec{i} = 0 \quad \Rightarrow \quad \underset{O\rightarrow A}{W(\vec{R})} = E_C(A) - E_C(O)$

$E_C(A) = \frac{1}{2}m(\frac{v_0}{2})^2 = \frac{1}{8}mv_0^2$ et $E_C(O) = \frac{1}{2}mv_0^2 \quad \Rightarrow \quad \underset{O\rightarrow A}{W(\vec{R})} = -\frac{3}{8}mv_0^2$

Ou bien, par un calcul direct :

$\underset{O\rightarrow A}{W(\vec{R})} = \int_O^A \vec{R}d\overrightarrow{OM} = \int_O^A (\vec{R}_t + \vec{R}_n)dx\vec{i} = \int_O^A \vec{R}_t\,dx\vec{i} = \int_O^A -\alpha v^2\,dx$

$\frac{v_0}{v} = 1 + \frac{\alpha}{m}v_0 t \quad \rightarrow \quad x = \frac{m}{\alpha}ln(\frac{v_0}{v}) \ \Rightarrow\ dx = -\frac{m}{\alpha}\frac{dv}{v} \quad \Rightarrow \quad \underset{O\rightarrow A}{W(\vec{R})} = \int_{v_0}^{\frac{v_0}{2}} mv\,dv \ \Rightarrow\ \underset{O\rightarrow A}{W(\vec{R})} = \left[\frac{1}{2}mv^2\right]_{v_0}^{\frac{v_0}{2}}$

$$\Rightarrow \quad \underset{O\rightarrow A}{W(\vec{R})} = -\frac{3}{8}mv_0^2$$

__Exercice3__ : (3 *points*)

1) $dE_P = -dW(\vec{P}) = -\vec{P}d\overrightarrow{OM} = mg\vec{k}(dy\vec{j} + dz\vec{k}) = mg\,dz \quad \Rightarrow \quad E_P = mg\,z + \text{cte}$

$z_B = 0$ et $E_P(B) = 0 \Rightarrow \text{cte} = 0 \quad \Rightarrow \quad E_P = mg\,z$

$E_m(A) = E_C(A) + E_P(A) = \frac{1}{2}mv_A^2 + mgz_A\ ,\ z_A = h\ ,\ v_A = 0\ \Rightarrow\ E_m(A) = mgh \Rightarrow E_m(A) = 60J$

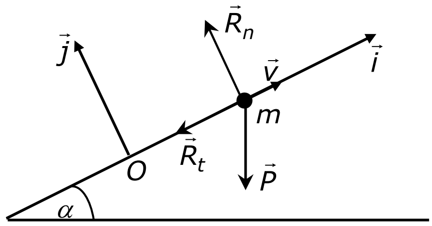
$E_m(B) = E_C(B) + E_P(B) = \frac{1}{2}mv_B^2 + mgz_B\ ,\ z_B = 0\ ,\ v_B = 6m/s \Rightarrow E_m(B) = \frac{1}{2}mv_B^2 \Rightarrow E_m(B) = 54J$

$E_m(A) \neq E_m(B) \ \Rightarrow$ pas de conservation de l'énergie mécanique⇒présence des forces de frottement.

2) Soit $\vec{F}$ la résultante de ces forces de frottement $\rightarrow$ $\vec{F}$ est une force non conservative.
Théorème de l'énergie mécanique entre les points *A* et *B* $\rightarrow$ $E_m(B) - E_m(A) = \underset{A\rightarrow B}{W(\vec{F})}$

$$\text{A.N : } \underset{A\rightarrow B}{W(\vec{F})} = -6\,J$$

<u>Exercice4</u> : (3 *points*)



1) P.F.D $\Rightarrow$ $\vec{P} + \vec{R} = m\vec{\gamma}$ $\Rightarrow$ $-\,mg\,sin(\alpha)\vec{i} - mg\,cos(\alpha)\vec{j} + \|\vec{R}_n\|\vec{j} - \|\vec{R}_t\|\vec{i} = m\gamma_x\vec{i} + m\gamma_y\vec{j}$

$\gamma_y = 0$ $\Rightarrow$ $\|\vec{R}_n\| = mg\,cos(\alpha)$ et $-\,mg\,sin(\alpha) - \|\vec{R}_t\| = m\gamma_x$

$\|\vec{R}_t\| = k_d\|\vec{R}_n\|$ $\rightarrow$ $\|\vec{R}_t\| = k_d\,mg\,cos(\alpha)$ $\Rightarrow$ $-mg\,sin(\alpha) - k_d\,mg\,cos(\alpha) = m\gamma_x$

$\Rightarrow$ $\gamma_x = -g[sin(\alpha) + k_d\,cos(\alpha)]$ A. N : $\gamma_x = -7.598\,m/s^2$

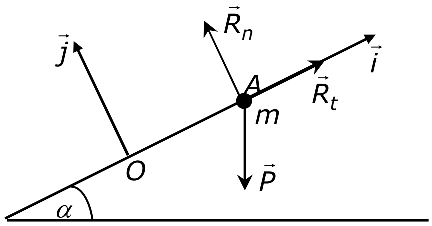
2) Soit *A* la position où le point *M* s'arrêtera $\rightarrow$ $v_A = 0$ et *d* la distance parcourue par la boîte avant de s'arrêter $\rightarrow$ $x_A = d$
Théorème de l'énergie cinétique entre les points *O* et *A* $\rightarrow$ $E_C(A) - E_C(O) = \underset{O\rightarrow A}{W(\vec{P})} + \underset{O\rightarrow A}{W(\vec{R})}$

$$\Rightarrow \quad E_C(A) - E_C(O) = \int_O^A (\vec{R} + \vec{P})d\overrightarrow{OM} = \int_O^A m\vec{\gamma}\,d\overrightarrow{OM} = \int_O^A m\,\gamma_x\,dx$$

$$\Rightarrow \quad E_C(A) - E_C(O) = m\,\gamma_x\int_0^d dx \quad \Rightarrow \quad E_C(A) - E_C(O) = m\,\gamma_x d$$

$$E_C(O) = \frac{1}{2}mv_0^2,\; E_C(A) = \frac{1}{2}mv_A^2 = 0 \;\Rightarrow\; -\frac{1}{2}mv_0^2 = m\,\gamma_x d \;\Rightarrow\; d = -\frac{v_0^2}{2\,\gamma_x} \;\text{ A .N : } d = 0.263m$$

3) Pour que la boîte, une fois arrêtée, ne reparte pas en arrière, il faut que $\vec{P} + \vec{R} = \vec{0}$ et $\|\vec{R}_t\| \le k_s\|\vec{R}_n\|$



- $\vec{P} + \vec{R} = \vec{0}$ $\Rightarrow$ $-\,mg\,sin(\alpha)\vec{i} - mg\,cos(\alpha)\vec{j} + \|\vec{R}_n\|\vec{j} + \|\vec{R}_t\|\vec{i} = \vec{0}$

$\Rightarrow$ $\|\vec{R}_n\| = mg\,cos(\alpha)$ et $\|\vec{R}_t\| = mg\,sin(\alpha)$

- $\|\vec{R}_t\| \le k_s\|\vec{R}_n\|$ $\Rightarrow$ $k_s \ge \dfrac{\|\vec{R}_t\|}{\|\vec{R}_n\|}$ $\Rightarrow$ $k_s \ge \dfrac{mg\,sin(\alpha)}{mg\,cos(\alpha)}$

$$\Rightarrow \quad k_s \ge tan(\alpha)$$

$\Rightarrow$ la valeur minimale du cœfficient de frottement statique k_s pour que la boîte, une fois arrêtée, ne reparte pas en arrière est $k_s = tan(\alpha)$ A. N : $k_s = 0.577$

Examen 10 (Session rattrapage) (durée 1h30mn)

Exercice : (6 *points*)

Un point matériel M est en mouvement dans le plan (xoy). Les composantes cartésiennes de son vecteur position sont : $x(t) = 2\cos(\omega t)$, $y(t) = 2\sin(\omega t)$ et $z(t) = 0$ où ω est une constante réelle et positive.

1°/ Quelle est la nature de la trajectoire de M ? Ce mouvement est-il uniforme ? Justifier la réponse.

2°/ Déterminer le vecteur accélération de M. Préciser son sens.

3°/ Calculer les accélérations tangentielle et normale de M. Déduire le rayon de courbure R_c .

4°/ Exprimer, en fonction du temps, l'abscisse curviligne s de M, comptée à partir du point $A(2,0,0)$.

Problème : (14 *points*)

On considère le repère fixe $\Re(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ (repère absolu), (xOy) étant le plan vertical. Soit une tige (O_1A), faisant un angle θ <u>constant</u> avec l'horizontale, en mouvement tel que son extrémité O_1 astreint à se déplacer le long de l'axe $(O\vec{i})$ avec $\overrightarrow{OO_1} = \frac{1}{2}at^2\vec{i}$ (a est une constante positive). On désigne par $\Re_1(O_1,\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ un repère lié à la tige (repère relatif) tel que $(\widehat{\vec{i},\vec{u}}) = (\widehat{\vec{j},\vec{v}}) = \theta$ et $\vec{w} = \vec{k}$. Soit un anneau M de masse m (assimilé à un point matériel) se déplaçant sans frottement le long de la tige et repéré dans $\Re_1$ par $\overrightarrow{O_1M} = r(t)\vec{u}$.

1°/ Exprimer dans la base $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$:

- **a°/** la vitesse du point M par rapport au repère $\Re_1$.
- **b°/** la vitesse du point M par rapport au repère $\Re$.
- **c°/** les moments cinétiques $\vec{\sigma}_{O_1}(M/\Re_1)$ et $\vec{\sigma}_O(M/\Re)$.
- **d°/** le poids de M et les forces d'inertie d'entraînement et de Coriolis.

2°/ Calculer l'énergie potentielle du poids de M par rapport au repère $\Re$, en fonction de θ.

3°/ Calculer l'énergie potentielle du poids de M par rapport au repère $\Re_1$, en fonction de θ.

4°/ Calculer l'énergie cinétique de M par rapport au repère $\Re_1$: $E_c(M/\Re_1)$.

5°/ Calculer l'énergie cinétique de M par rapport au repère $\Re$: $E_c(M/\Re)$.

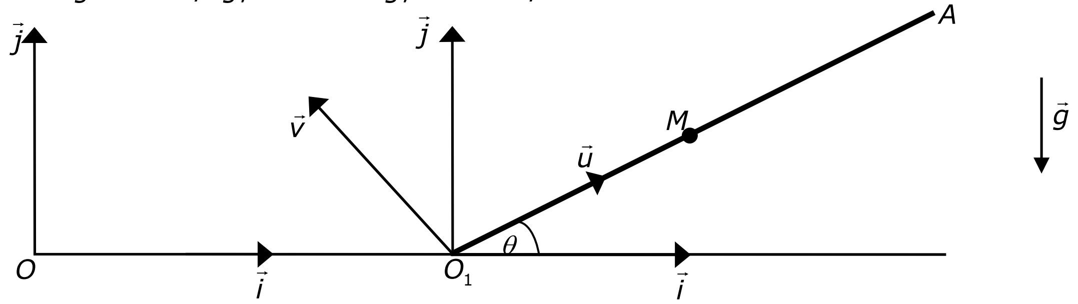
6°/ En appliquant le théorème de l'énergie mécanique dans le repère $\Re_1$, Montrer que le terme $\frac{d^2r(t)}{dt^2}$ est constant.

7°/ En appliquant le théorème du moment cinétique dans le repère $\Re_1$, déterminer le module de la réaction $\vec{R}$, exercée sur M par la tige.

8°/ <u>Application numérique</u> :

Calculer les modules du vecteur accélération relative et de la réaction $\vec{R}$.

On donne g = 10 N/kg, m = 100 g, a = 2 m/s^2 et θ = 30°.



Correction d'examen 10 (session rattrapage)

Exercice : (6 *points*)

1) • $x^2 + y^2 = 4cos^2(\omega t) + 4\,sin^2(\omega t) \Rightarrow x^2 + y^2 = 4$: Equation caractéristique d'un cercle de rayon R = 2 et de centre $C(0,0,0)$ $\Rightarrow$ le mouvement est circulaire (la trajectoire est un cercle de rayon R = 2 et de centre $C(0,0,0)$).

• $v_x = \dfrac{dx}{dt} = -2\omega\ sin(\omega t)$, $v_y = \dfrac{dy}{dt} = 2\omega\ cos(\omega t)$ et $v_z = \dfrac{dz}{dt} = 0$

$$\Rightarrow \|\vec{v}\| = \sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2 + {v_z}^2} = 2\omega = \text{cte}$$

$\Rightarrow$ le mouvement de M est uniforme.

2) • $\gamma_x = \dfrac{dv_x}{dt} = -2\omega^2\ cos(\omega t)$, $\gamma_y = \dfrac{dv_y}{dt} = -2\omega^2\ sin(\omega t)$, $\gamma_z = \dfrac{dv_z}{dt} = 0$

$\Rightarrow$ $\vec{\gamma} = -2\omega^2\ cos(\omega t)\vec{i} - 2\omega^2\ sin(\omega t)\vec{j}$

• $\vec{\gamma} = -\omega^2\left[2\,cos(\omega t)\vec{i} + 2\,sin(\omega t)\vec{j}\right] = -\omega^2\overrightarrow{OM} \Rightarrow$ le sens de $\vec{\gamma}$ est opposé à celui de $\overrightarrow{OM}$

3) • $\vec{\gamma}_t = \dfrac{d\|\vec{v}\|}{dt}\vec{\tau}$, $\|\vec{v}\| = 2\omega \rightarrow \dfrac{d\|\vec{v}\|}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{\gamma}_t = \vec{0}$ (accélération tangentielle)

• $\vec{\gamma}_n = \vec{\gamma} - \vec{\gamma}_t = \vec{\gamma} \Rightarrow \vec{\gamma}_n = -2\omega^2\ cos(\omega t)\vec{i} - 2\omega^2\ sin(\omega t)\vec{j}$ (accélération normale)

• $\vec{\gamma}_n = \dfrac{\|\vec{v}\|^2}{R_C}\vec{n} \rightarrow \|\vec{\gamma}_n\| = \dfrac{\|\vec{v}\|^2}{R_C} \Rightarrow R_C = \dfrac{\|\vec{v}\|^2}{\|\vec{\gamma}_n\|}$, $\|\vec{\gamma}_n\| = 2\omega^2 \Rightarrow R_C = \dfrac{4\omega^2}{2\omega^2} \Rightarrow R_C = 2$ (rayon de courbure)

4) $\dfrac{ds}{dt} = \|\vec{v}\| = 2\omega \Rightarrow s(t) = 2\omega t + cte$. A $t = 0$: $x = 2, y = 0, z = 0 \Rightarrow M \equiv A \Rightarrow s(t = 0) = 0 \Rightarrow cte = 0$

$$\Rightarrow s(t) = 2\omega t$$

Problème: (14 *points*)

$\vec{u} = cos(\theta)\vec{i} + sin(\theta)\vec{j}$, $\vec{v} = -sin(\theta)\vec{i} + cos(\theta)\vec{j}$, $\vec{i} = cos(\theta)\vec{u} - sin(\theta)\vec{v}$, $\vec{j} = sin(\theta)\vec{u} + cos(\theta)\vec{v}$

$\theta = cte \Rightarrow \dfrac{d\vec{u}}{dt/\Re} = \vec{0}$, $\dfrac{d\vec{v}}{dt/\Re} = \vec{0}$, $\dfrac{d\vec{w}}{dt/\Re} = \vec{0}$, $\vec{\Omega}(\Re_1/\Re) = \vec{0}$

$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO_1} + \overrightarrow{O_1M} = \left[\dfrac{1}{2}at^2\ cos(\theta) + r\right]\vec{u} - \dfrac{1}{2}at^2\ sin(\theta)\vec{v}$

1) a)- $\vec{v}(M/\Re_1) = \dfrac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt/\Re_1} \Rightarrow \vec{v}(M/\Re_1) = \dot{r}\vec{u}$

b)- $\vec{v}(M/\Re) = \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt/\Re} = at\vec{i} + \dot{r}\vec{u} \Rightarrow \vec{v}(M/\Re) = \left[at\,cos(\theta) + \dot{r}\right]\vec{u} - at\,sin(\theta)\vec{v}$

c) • $\vec{\sigma}_{O_1}(M/\Re_1) = \overrightarrow{O_1M} \wedge m\vec{v}(M/\Re_1) \Rightarrow \vec{\sigma}_{O_1}(M/\Re_1) = \vec{0}$

• $\vec{\sigma}_O(M/\Re) = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v}(M/\Re) \Rightarrow \vec{\sigma}_O(M/\Re) = \dfrac{1}{2}mat^2\dot{r}\ sin(\theta)\vec{w}$

d) • Poids : $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\,sin(\theta)\vec{u} - mg\,cos(\theta)\vec{v}$

• Force d'inertie d'entraînement : $\vec{F}_e = -m\vec{\gamma}_e$

$$\vec{\gamma}_e = \vec{\gamma}(O_1 / \Re) + \frac{d\vec{\Omega}(\Re_1 / \Re)}{dt / \Re} \wedge \overrightarrow{O_1M} + \vec{\Omega}(\Re_1 / \Re) \wedge \left[\vec{\Omega}(\Re_1 / \Re) \wedge \overrightarrow{O_1M}\right] = a\cos(\theta)\vec{u} - a\sin(\theta)\vec{v}$$

$\Rightarrow \quad \vec{F}_e = -ma\cos(\theta)\vec{u} + ma\sin(\theta)\vec{v}$

• Force d'inertie de Coriolis : $\vec{F}_c = -m\vec{\gamma}_c$, $\vec{\gamma}_c = 2\vec{\Omega}(\Re_1 / \Re) \wedge \vec{v}(M / \Re_1) = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{F}_c = \vec{0}$

2) $dE_p(M / \Re) = -dw(\vec{P} / \Re) = -\vec{P}d\overrightarrow{OM} = mg\vec{j}\left[dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}\right] = mgdy \;\Rightarrow\; E_p(M / \Re) = mgy + cte$

$y = r\sin(\theta) \;\Rightarrow\; E_p(M / \Re) = mgr\sin(\theta) + cte$

3) $dE_p(M / \Re_1) = -dw(\vec{P} / \Re_1) = -\vec{P}d\overrightarrow{O_1M} = \left[mg\sin(\theta)\vec{u} + mg\cos(\theta)\vec{v}\right]dr\vec{u} = mg\sin(\theta)dr$

$\Rightarrow \; E_p(M / \Re_1) = mgr\sin(\theta) + cte$

4) $E_C(M / \Re_1) = \frac{1}{2}m\left\|\vec{v}(M / \Re_1)\right\|^2 \;\Rightarrow\; E_C(M / \Re_1) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2$

5) $E_C(M / \Re) = \frac{1}{2}m\left\|\vec{v}(M / \Re)\right\|^2 \;\Rightarrow\; E_C(M / \Re) = \frac{1}{2}m\left[a^2t^2 + 2at\dot{r}\cos(\theta) + \dot{r}^2\right]$

6) $\Re_1$ est non galiléen $\Rightarrow \frac{dE_m(M / \Re_1)}{dt} = P(\vec{F}_{ncv} / \Re_1) + P(\vec{F}_e / \Re_1) + P(\vec{F}_c / \Re_1)$

• $E_m(M / \Re_1) = E_c(M / \Re_1) + E_p(M / \Re_1) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + mgr\sin(\theta) + cte$

$\Rightarrow \; \frac{dE_m(M / \Re_1)}{dt} = m\dot{r}\ddot{r} + mg\dot{r}\sin(\theta)$

• $P(\vec{F}_{ncv} / \Re_1) = P(\vec{R} / \Re_1) = \vec{R}\vec{v}(M / \Re_1)$. On pose $\vec{R} = R_1\vec{u} + R_2\vec{v} + R_3\vec{w}$

Mouvement sans frottement $\Rightarrow R_1 = 0 \;\Rightarrow\; \vec{R} = R_2\vec{v} + R_3\vec{w} \;\Rightarrow\; P(\vec{F}_{ncv} / \Re_1) = P(\vec{R} / \Re_1) = 0$

• $P(\vec{F}_e / \Re_1) = \vec{F}_e\vec{v}(M / \Re_1) = \left[-ma\cos(\theta)\vec{u} + ma\sin(\theta)\vec{v}\right]\dot{r}\vec{u} \;\Rightarrow\; P(\vec{F}_e / \Re_1) = -ma\dot{r}\cos(\theta)$

• $P(\vec{F}_c / \Re_1) = \vec{F}_c(\vec{R} / \Re_1) = \vec{F}_c\vec{v}(M / \Re_1) = 0$

$\Rightarrow \; m\dot{r}\ddot{r} + mg\dot{r}\sin(\theta) = -ma\dot{r}\cos(\theta) \;\Rightarrow\; \ddot{r} = -g\sin(\theta) - a\cos(\theta)$

a, g et θ sont des constantes , $\ddot{r} = \frac{d^2r}{dt^2} \quad \Rightarrow$ le terme $\frac{d^2r}{dt^2}$ est constant.

7) R1 est non galiléen $\Rightarrow \frac{d\vec{\sigma}_{O_1}(M/\Re_1)}{dt / \Re_1} = \vec{m}_{O_1}(\vec{P}) + \vec{m}_{O_1}(\vec{R}) + \vec{m}_{O_1}(\vec{F}_e) + \vec{m}_{O_1}(\vec{F}_c)$

• $\frac{d\vec{\sigma}_{O_1}(M/\Re_1)}{dt / \Re_1} = \vec{0}$

• $\vec{m}_{O_1}(\vec{R}) = \overrightarrow{O_1M} \wedge \vec{R} = r\vec{u} \wedge \left[R_2\vec{v} + R_3\vec{w}\right] = rR_2\vec{w} - rR_3\vec{v}$

• $\vec{m}_{O_1}(\vec{P}) = \overrightarrow{O_1M} \wedge \vec{P} = r\vec{u} \wedge \left[-mg\sin(\theta)\vec{u} - mg\cos(\theta)\vec{v}\right] = -rmg\cos(\theta)\vec{w}$

• $\vec{m}_{O_1}(\vec{F}_e) = \overrightarrow{O_1M} \wedge \vec{F}_e = r\vec{u} \wedge \left[-ma\cos(\theta)\vec{u} + ma\sin(\theta)\vec{v}\right] = rma\sin(\theta)\vec{w}$

• $\vec{m}_{O_1}(\vec{F}_c) = \overrightarrow{O_1M} \wedge \vec{F}_c = r\vec{u} \wedge \vec{0} = \vec{0}$

$\Rightarrow \; rR_2\vec{w} - rR_3\vec{v} - rmg\cos(\theta)\vec{w} + rma\sin(\theta)\vec{w} = \vec{0} \;\Rightarrow\; R_2 = mg\cos(\theta) - ma\sin(\theta)$ et $R_3 = 0$

$\Rightarrow \; \left\|\vec{R}\right\| = \left|R_2\right| = \left|mg\cos(\theta) - ma\sin(\theta)\right|$

8) $\vec{\gamma}_r(M / \Re_1) = \ddot{r}\vec{u} = -g\sin(\theta) - a\cos(\theta) \Rightarrow \left\|\vec{\gamma}_r(M / \Re_1)\right\| = \left|g\sin(\theta) + a\cos(\theta)\right|$

$\left\|\vec{R}\right\| = \left|R_2\right| = \left|mg\cos(\theta) - ma\sin(\theta)\right|$

<u>Application numérique</u> :

• $\left\|\vec{\gamma}_r(M / \Re_1)\right\| = 6.732\, m / s^2$

• $\left\|\vec{R}\right\| = 0.766\, N$

Examen 11 (Session ordinaire) (durée 2h)

Exercice 1 (*5 points*)

Soit un champ de force $\vec{F}(M)$ défini dans un repère $\Re(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ en tout point $M(x,y,z)$ de l'espace par : $\vec{F} = (yz - axy)\vec{i} + (bxz - x^2)\vec{j} + cxy\vec{k}$ (a,b et c sont des constantes).

1)- Déterminer les valeurs des constantes a, b et c pour que le champ de force $\vec{F}(M)$ dérive d'une énergie potentielle. Calculer cette énergie potentielle (On suppose que $E_p(0,0,0) = 0$).

2)- Calculer le travail de $\vec{F}$ quand son point d'application se déplace de $A(1,1,1)$ à $B(2,2,4)$.

L'unité de la longueur est le mètre, la force est exprimée en Newton

$$\overrightarrow{rot}\vec{F} = \vec{\nabla} \wedge \vec{F} \; ; \; \vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$$

Exercice 2 (1*5 points*)

On considère le repère fixe $\Re(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ (repère absolu), (yOz) étant le plan vertical. Soit un cerceau (C) de centre O_1 et de rayon R, en mouvement de translation dans le plan (yOz) tel que $\overrightarrow{OO_1} = b\vec{j} + \frac{1}{2}at^2\vec{k}$ ((yOz) étant le plan du cerceau, a et b étant des constantes positives non nulles). On désigne par $\Re_1(O_1,\vec{i}_1,\vec{j}_1,\vec{k}_1)$ un repère lié au cerceau (repère relatif) tel que $\vec{i}_1 = \vec{i}$, $\vec{j}_1 = \vec{j}$ et $\vec{k}_1 = \vec{k}$. Soit un point M, de masse m, se déplaçant sans frottement sur le cerceau (C) et repéré dans R_1 par l'angle θ (voir la figure ci-dessous). On suppose qu'à $t = 0$, $\theta = 0$ et $E_p(M/\Re) = E_p(M/\Re_1) = 0$.

1)- Exprimer dans la base ($\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z$) :

- **a)** les vecteurs de la base ($\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1$).
- **b)** le vecteur vitesse du point M par rapport au repère $\Re$, $\vec{v}(M/\Re)$.
- **c)** le vecteur vitesse du point M par rapport au repère $\Re_1$, $\vec{v}(M/\Re_1)$.
- **d)** le moment cinétique $\vec{\sigma}_{O_1}(M/\Re_1)$ et sa dérivée temporelle $\dfrac{d\vec{\sigma}_{O_1}(M/\Re_1)}{dt/\Re_1}$
- **e)** le poids de M et les forces d'inertie.

2)- Le repère R_1 est-il Galiléen ou non Galiléen ? Justifier votre réponse.

3)- Calculer l'énergie potentielle du poids de M par rapport au repère $\Re$, $E_p(M/\Re)$.

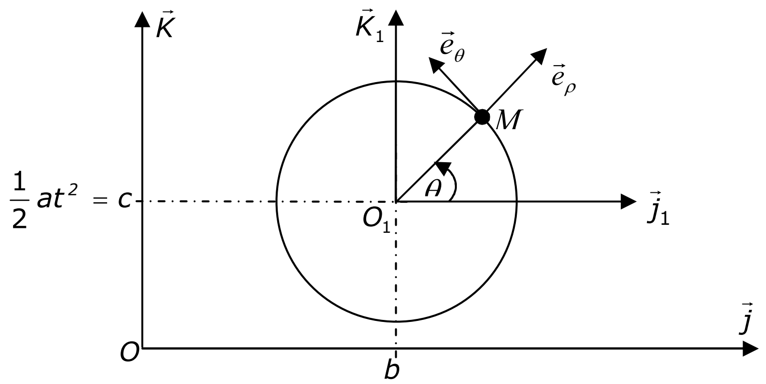
4)- Calculer l'énergie potentielle du poids de M par rapport au repère $\Re_1$, $E_p(M/\Re_1)$

5)- Calculer l'énergie cinétique de M par rapport au repère $\Re_1$: $E_c(M/\Re_1)$.

6)- En appliquant le théorème de la quantité de mouvement dans le repère $\Re_1$, déterminer les composantes de la réaction $\vec{R}$, exercée sur M par le cerceau, dans la base ($\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z$).

7)- En appliquant le théorème de l'énergie mécanique dans le repère $\Re_1$, déterminer une équation différentielle du mouvement de second ordre en t vérifiée par θ.

8)- En appliquant le théorème du moment cinétique dans le repère $\Re_1$, retrouver l'équation différentielle du mouvement de second ordre en t vérifiée par θ.



Examen 12 (Session rattrapage) (durée 1h30mn)

On considère le repère fixe $\Re(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ (repère absolu), (yOz) étant le plan vertical. Soit un cerceau (C) de centre O_1 et de rayon R en mouvement de rotation propre autour de l'axe (Ox) avec une vitesse angulaire constante ω tel que $\overrightarrow{OO_1} = b\vec{j} + a\vec{k}$ ((yOz) étant le plan du cerceau, a et b étant des constantes positives non nulles). On désigne par $\Re_1(O_1,\vec{i}_1,\vec{j}_1,\vec{k}_1)$ un repère lié au cerceau (repère relatif) tel que $\vec{i}_1 = \vec{i}$ et $(\vec{j}\,\hat{,}\,\vec{j}_1) = (\vec{k}\,\hat{,}\,\vec{k}_1) = \omega t$. Soit un point M, de masse m, se déplaçant sans frottement sur le cerceau (C) et repéré dans $\Re_1$ par l'angle $\theta = (\vec{j}_1\,\hat{,}\,\vec{e}_\rho) = (\vec{k}_1\,\hat{,}\,\vec{e}_\theta)$ (voir la figure ci-dessous).

1)- Exprimer dans la base $(\vec{e}_\rho,\vec{e}_\theta,\vec{e}_z)$, le vecteur rotation instantanée de $\Re_1$ par rapport au repère $\Re$, $\vec{\Omega}(\Re_1/\Re)$.

2)- Exprimer dans la base $(\vec{e}_\rho,\vec{e}_\theta,\vec{e}_z)$, le vecteur vitesse du point M par rapport au repère $\Re_1$, $\vec{v}(M/\Re_1)$.

3)- Exprimer dans la base $(\vec{e}_\rho,\vec{e}_\theta,\vec{e}_z)$, le vecteur accélération du point M par rapport au repère $\Re_1$, $\vec{\gamma}(M/\Re_1)$.

4)- Exprimer dans la base $(\vec{e}_\rho,\vec{e}_\theta,\vec{e}_z)$, le poids de M, $\vec{P}$.

5)- Exprimer dans la base $(\vec{e}_\rho,\vec{e}_\theta,\vec{e}_z)$, la force d'inertie d'entraînement, $\vec{f}_e$.

6)- Exprimer dans la base $(\vec{e}_\rho,\vec{e}_\theta,\vec{e}_z)$, la force d'inertie de Coriolis, $\vec{f}_c$.

7)- Calculer l'énergie cinétique de M par rapport au repère $\Re_1$: $E_c(M/\Re_1)$.

8)- Soit $\vec{R} = R_\rho\vec{e}_\rho + R_\theta\vec{e}_\theta + R_z\vec{e}_z$ la réaction exercée sur M par le cerceau. Déterminer $\vec{R}$ tout en appliquant le théorème de la quantité de mouvement dans le repère R_1.

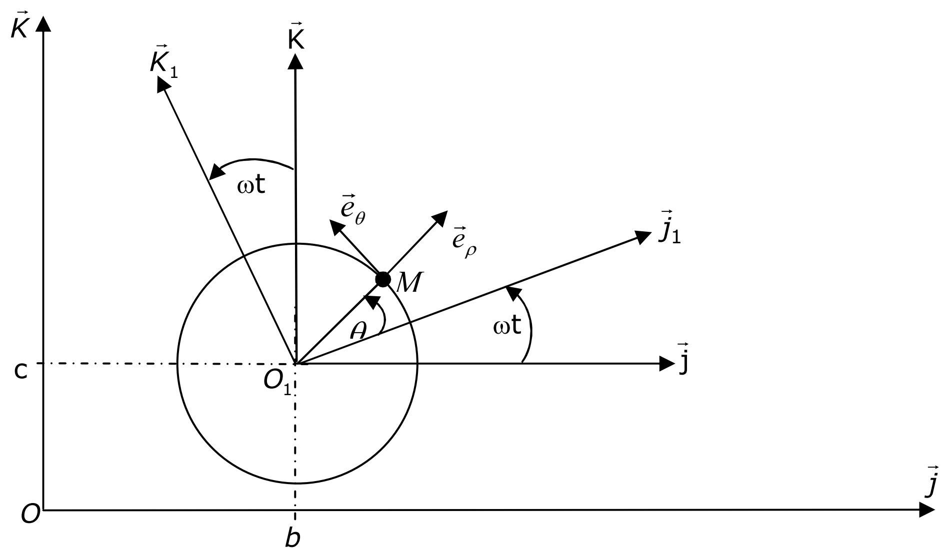
9)- Calculer la puissance de $\vec{P}$ par rapport au repère $\Re_1$, $P(\vec{P}/\Re_1)$.

10)- Calculer la puissance de $\vec{R}$ par rapport au repère $\Re_1$, $P(\vec{R}/\Re_1)$.

11)- Calculer la puissance de $\vec{f}_e$ par rapport au repère $\Re_1$, $P(\vec{f}_e/\Re_1)$.

12)- Calculer la puissance de $\vec{f}_c$ par rapport au repère $\Re_1$, $P(\vec{f}_c/\Re_1)$.

13)- En appliquant le théorème de l'énergie cinétique dans le repère $\Re_1$, déterminer une équation différentielle du mouvement de second ordre en t vérifiée par θ.



Examen 13 (Session ordinaire) (durée 2h)

Questions du cours (*4 points*)

1) Montrer que le théorème de la quantité du mouvement est invariant par rapport aux référentiels galiléens (principe de l'invariance galiléenne).

2) Montrer que le travail de la force de Coriolis par rapport à un référentiel non galiléen est nul.

3) Donner la définition de :

a) Plan Osculateur
b) Référentiel de Copernic
c) Référentiel géocentrique
d) Force à distance.

Exercice 1 (*6 points*)

Un point matériel *M* décrit une hélice, de pas *h*, enroulée sur un cylindre de rayon *R* et d'axe (*Oz*). Ses équations horaires, dans le repère $\Re(Oxyz)$, sont : $x = R\cos\phi;\ y = R\sin\varphi;\ z = a\varphi$ où *a* est une constant positive et $\varphi = (\vec{i}, \overrightarrow{OM'})$ (*M'* est la projection de *M* sur le plan (*xoy*)).

1) Déterminer dans la base cylindrique $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z)$ les vecteurs vitesse $\vec{v}(M/\Re)$ et accélération $\vec{\gamma}(M/\Re)$ de *M*.

2) Déduire, dans la base cylindrique $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z)$, les accélérations tangentielle et normale de *M*.

3) Déterminer le rayon de courbure R_c de la trajectoire de *M* en fonction de *R* et *a.*

4) Déduire, dans la base cylindrique $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z)$, les vecteurs de la base de Frenet $(\vec{\tau}, \vec{n}, \vec{b})$.

5) Montrer que l'angle $\theta = (\vec{e}_\varphi, \vec{v}(M/\Re))$ est constant.

6) Si $\varphi = \omega t$ (ω est une constante), quelle est la relation entre le pas *h* et la constante *a*.

Exercice 2 (*10 points*)

On considère le repère $\Re(Oxyz)$ (repère absolu), (*xOy*) étant le plan horizontal. Soit (*P*) un plan vertical qui tourne autour de l'axe (*Oz)* avec une vitesse angulaire constante ω. Dans ce plan (*P*), un anneau *M* assimilé à un point matériel de masse *m* se meut sans frottement, dans le champ de pesanteur, sur un cerceau (*C*) de centre O_1 et de rayon *R*. La position de O_1 est définie par les paramètres *a* et *b* (*a* et *b* sont des constantes), celle de *M* est définie par l'angle $\theta(t)$ (voir figure ci-dessous). On désigne par $\Re_1(O_1, \vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$ un repère lié au plan (*P*) (repère relatif) tel que le plan $(x_1O_1z_1)$ reste constamment dans le plan (*P*) et $\vec{k}_1 = \vec{k}$. On suppose que $\theta = \dot{\theta} = 0$ à $t = 0$.

1) Exprimer dans la base $(\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$:

a) le vecteur rotation de $\Re_1$ par rapport à $\Re$: $\vec{\Omega}(\Re_1/\Re)$.

b)- la vitesses relative du point *M*

c)- les accélérations relative, d'entraînement et de Coriolis du point *M.*

d) les forces d'inertie.

e)- le moment cinétique $\vec{\sigma}_{O_1}(M/\Re_1)$ ainsi que sa dérivée $\dfrac{d\vec{\sigma}_{O_1}(M/\Re_1)}{dt/\Re_1}$

2) Calculer l'énergie cinétique de *M* par rapport au repère $\Re_1$: $E_c(M/\Re_1)$.

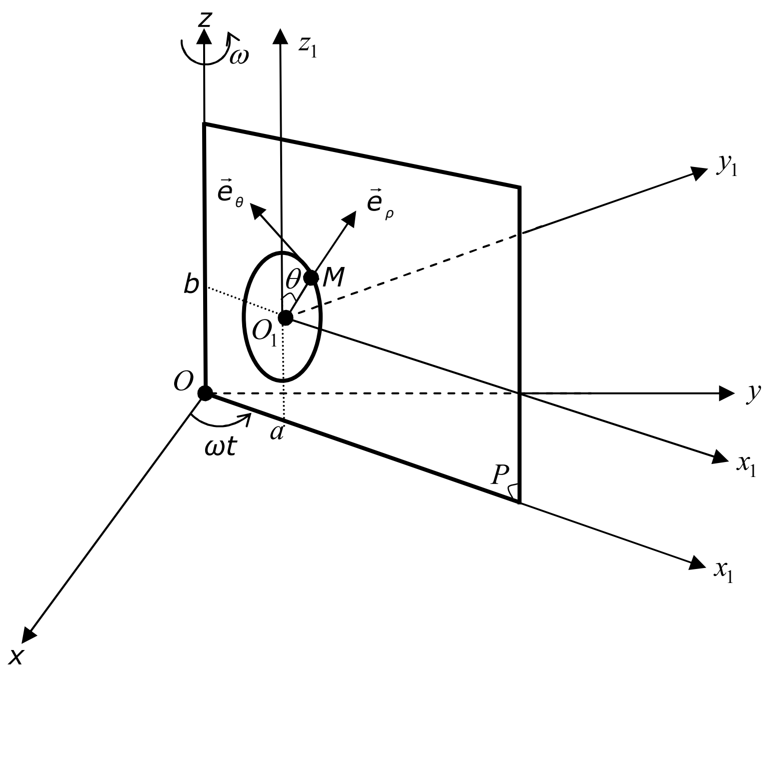
3) Calculer l'énergie potentielle de *M* par rapport à $\Re_1$ ($E_p(M/\Re_1)$) en fonction de θ.

4) En appliquant le théorème de l'énergie mécanique dans le repère $\Re_1$, déterminer l'équation différentielle du mouvement de *M.*

5) Déduire une relation entre θ et $\dot{\theta}$.

6) En appliquant le théorème du moment cinétique dans le repère $\Re_1$, retrouver l'équation différentielle du mouvement de *M.*

7) En appliquant le théorème de la quantité du mouvement dans le repère $\Re_1$, calculer les composantes de la réaction $\vec{R}$ dans la base ($\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z$).



Examen 14 (Session rattrapage) (durée 1h15mn)

Exercice 1

On considère un point matériel M en mouvement dans le plan $(O,\vec{i},\vec{j})$ d'un repère orthonormé direct $\Re(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. La position de M est repérée par les coordonnées polaires données par : $\rho = 1 + cos(\varphi)$ et $\varphi = \omega t$ (ω est une constante positive).

1- Déterminer l'allure de la trajectoire de M.

2- Exprimer dans la base polaire ($\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi$) la vitesse $\vec{v}(M/\Re)$ et l'accélération $\vec{\gamma}(M/\Re)$ de M.

3- Déterminer le rayon de courbure R_c de la trajectoire.

4- Calculer la longueur L parcourue par M entre $t = 0$ et $t = \dfrac{\pi}{\omega}$.

Exercice 2

Dans le repère $\Re(Oxyz)$ muni de la base OND $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère une particule M qui se déplace dans le champ de force conservatif suivant:

$$\vec{F} = (2x + 6y + 2z)\vec{i} + (6x - y + 3z)\vec{j} + (2x + 3y - z)\vec{k}.$$

Calculer l'énergie potentielle, $E_p(x,y,z)$, dérivée par $\vec{F}$ (on donne $E_p(0,0,0)=0$).

Exercice 3

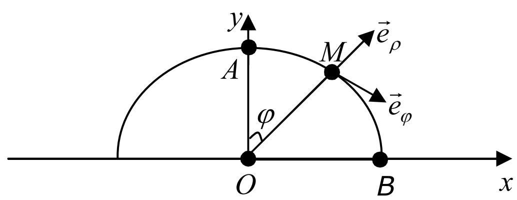
Soit une particule M de masse m en mouvement, dans le plan xOy (plan vertical), sans frottement sur une tige circulaire de rayon R. La position instantanée de M est définie par l'angle φ (voir **figure ci-dessous**). Initialement, M est lâché du point A sans vitesse initiale.

1- Calculer l'énergie potentielle du poids de M en fonction de φ.

2- Calculer l'énergie cinétique de M.

3- Déterminer l'équation différentielle du mouvement de M, vérifiée par φ, par application du théorème de l'énergie cinétique.

4- Calculer la vitesse de M au point B.



Examen 15 (Session ordinaire) (durée 1h30mn)

Exercice 1 (*5pts*)

Soit un champ de force $\vec{F}(M)$ défini dans un repère $\Re(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ en tout point $M(x,y,z)$ de l'espace par : $\vec{F} = \lambda(yz - 2xy)\vec{i} + \lambda(xz - x^2)\vec{j} + \lambda xy\vec{k}$ (λ *est une* constante).

1)- Montrer que ce champ de force dérive d'une énergie potentielle. Calculer cette énergie potentielle.

2)- Calculer le travail de $\vec{F}$ quand son point d'application se déplace de $A(1,1,1)$ à $B(1,0,2)$.
L'unité de la longueur est le mètre, la force est exprimée en Newtons.

Exercice 2 (1*5pts*)

On considère le repère fixe $\Re(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ (repère absolu), (xOy) étant le plan horizontal. Soit une tige homogène (O_1A) de longueur ℓ, en mouvement autour de l'axe $(O\vec{k})$ avec une vitesse angulaire constante ω. On désigne par $\Re_1(O_1,\vec{i}_1,\vec{j}_1,\vec{k}_1)$ un repère lié à la tige (repère relatif) tel que le plan $(x_1O_1y_1)$ reste constamment parallèle au plan (xOy) et $\vec{k}_1 = \vec{k}$. L'origine O_1 de $\Re_1$ se déplace le long de l'axe $(O\vec{k})$ tel que $\overrightarrow{OO_1} = \frac{1}{2}at^2\vec{K}$. Soit un point M, de masse m, se déplaçant sans frottement sur la tige (O_1A) et repéré dans $\Re_1$ par $\overrightarrow{O_1M} = x_1(t)\vec{i}_1$.
(a et ω étant des constantes positives).

1)- Exprimer dans la base $(\vec{i}_1,\vec{j}_1,\vec{k}_1)$:
- **a)** la vitesse du point M par rapport au repère $\Re$.
- **b)** la vitesse du point M par rapport au repère $\Re_1$.
- **c)** le moment cinétique $\vec{\sigma}_{O_1}(M/\Re_1)$.
- **d)** le poids de M et les forces d'inertie d'entraînement et de Coriolis.

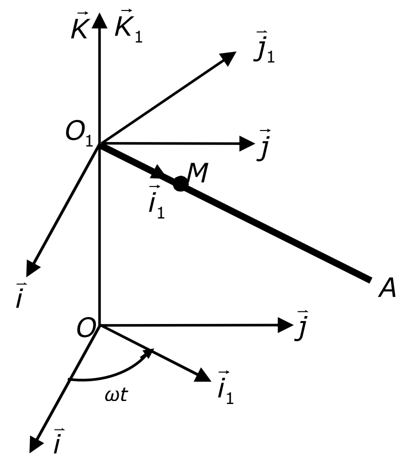
2)- Calculer l'énergie potentielle de M par rapport au repère $\Re$.

3)- Calculer l'énergie potentielle de M par rapport au repère $\Re_1$.

4)- Calculer l'énergie cinétique de M par rapport au repère $\Re_1$: $E_c(M/\Re_1)$.

5)- En appliquant le théorème du moment cinétique dans le repère $\Re_1$, déterminer les composantes de la réaction $\vec{R}$, exercée sur M par la tige, dans la base $(\vec{i}_1,\vec{j}_1,\vec{k}_1)$.

6)- En appliquant le théorème de l'énergie mécanique dans le repère $\Re_1$, déterminer une équation différentielle du second ordre en t vérifiée par x_1.



Examen 16 (Session rattrapage) (durée 1h15 mn)

Exercice 1 (10*pts*)

Un point M de masse m, est astreint à se déplacer sur l'axe (Ox) d'un Référentiel galiléen $\Re(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ (xOy étant le plan horizontal). Il est soumis, dans la direction (Ox), à la force $\vec{F} = -\lambda\, m\,(\frac{dx}{dt})\,\vec{i}$, où $x=OM$ et λ est une constante positive. A l'instant t = 0, M se trouve en O et possède le vecteur vitesse $\vec{v}_0 = v_0\vec{i}$ avec $v_0 > 0$.

1)- Déterminer l'équation horaire $x(t)$ du mouvement en fonction de v_0 et λ.

2)- Déduire les expressions des vecteurs vitesse $\vec{v}$ et accélération $\vec{\gamma}$, de M par rapport au repère R, en fonction du temps (t), v_0 et λ.

3)- Exprimer les vecteurs vitesse $\vec{v}$ et accélération $\vec{\gamma}$ en fonction de x, v_0 et λ.

4)- Le mouvement de M, est-il accélère, retardé ou uniforme ? Justifier votre réponse.

Exercice 2 (10*pts*)

On considère un point M en mouvement dans le plan (xOy) d'un Référentiel galiléen $\Re(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. M est repéré par ses coordonnées polaires définies par les équations suivantes :

$$\rho = 2\ A\ COS(\varphi) \qquad ; \qquad \varphi = \omega t / 2 \qquad (A \text{ et } \omega \text{ sont des constantes positives})$$

1)- Déterminer l'équation cartésienne de la trajectoire de M.

2)- Représenter cette trajectoire dans le plan xOy.

3)- Déterminer dans la base polaire $(\vec{e}_\rho,\vec{e}_\varphi)$ la vitesse $\vec{v}$ et l'accélération $\vec{\gamma}$ de M en fonction de A, ω et φ.

4)- Préciser la nature du mouvement de M.

5)- Soit P un point repéré par les coordonnees cartisiennes ($x_P=A, y_P=0, z_p=0$).

a)- Calculer dans la base polaire $(\vec{e}_\rho,\vec{e}_\varphi)$, les composantes du vecteur $\overrightarrow{PM}$ en fonction de A et φ.

b)- Déduire une relation qui lie $\overrightarrow{PM}$ et $\vec{\gamma}$. Commenter ce résultat.

Examen 17 (Session ordinaire) (durée 2h)

Exercice 1

On considère le repère $R(Oxyz)$ (repère absolu) muni de la base O.N.D $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, (xOy) étant le plan horizontal. Soit (P) un plan vertical qui tourne autour de (Oz) avec une vitesse angulaire constante ω. On considère le repère $R_1(Ox_1y_1z_1)$ (repère relatif) muni de la base OND $(\vec{i}_1,\vec{j}_1,\vec{k}_1)$ tel que (x_1Oz_1) se trouve constamment dans le plan (P) et $\vec{k}=\vec{k}_1$ (**voir figure**).

Soit (Δ) une tige (de vecteur directeur unitaire $\vec{u}_1$) passant par O, constamment contenue dans le plan (P) et faisant un angle α constante avec l'axe (Oz_1) ($(\vec{k}_1,\vec{u}_1)=\alpha=$ constante)

Un anneau M de masse m (assimilé à un point matériel) se meut sans frottement le long de la tige (Δ). La position de M sur la tige est définie par : $\overrightarrow{OM}=\lambda(t)\vec{u}_1$.

Le point M qui est en mouvement dans le champ de pesanteur $\vec{g}$ est soumis en plus à la force $\vec{F}=-K\lambda(t)\vec{u}_1$ (k est une constante positive) et à la réaction $\vec{R}$, exercée par la tige.

Soient $\vec{u}_2$ un vecteur unitaire, contenu dans le plan (P) et perpendiculaire à $\vec{u}_1$, et $\vec{u}_3$ un vecteur unitaire tel que la base $(\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3)$ est OND.

1°)- Exprimer dans la base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ les vecteurs $\vec{i}_1$ et $\vec{j}_1$.

2°)- Exprimer dans la base $(\vec{i}_1,\vec{j}_1,\vec{k}_1)$:

a)- $\dfrac{d\vec{i}_1}{dt/R}$ et $\dfrac{d\vec{j}_1}{dt/R}$. **b)-** les vecteurs $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ et $\vec{u}_3$. **c)-** $\dfrac{d\vec{u}_1}{dt/R}$, $\dfrac{d\vec{u}_2}{dt/R}$ et $\dfrac{d\vec{u}_3}{dt/R}$

d)- $\dfrac{d\vec{u}_1}{dt/R_1}$, $\dfrac{d\vec{u}_2}{dt/R_1}$ et $\dfrac{d\vec{u}_3}{dt/R_1}$ **e)-** la vitesse de rotation de R_1 par rapport à R, $\vec{\Omega}(R_1/R)$.

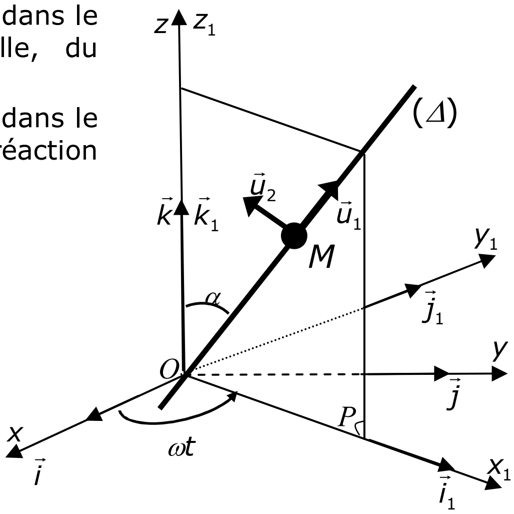
f)- la vitesse relative du point M. **g)-** la vitesse d'entraînement du point M.
h)- l'accélération relative du point M. **i)-** l'accélération d'entraînement du point M.
j)- l'accélération de Coriolis du point M.

k)- le moment cinétique $\vec{\sigma}_O(M/R_1)$ ainsi que sa dérivée $\dfrac{d\vec{\sigma}_O(M/R_1)}{dt/R_1}$.

3°)- Calculer l'énergie cinétique de M par rapport au repère R_1 : $E_c(M/R_1)$.

4°)- En appliquant le théorème de l'énergie cinétique dans le repère R_1, déterminer l'équation différentielle, du mouvement de M, vérifiée par $\lambda(t)$.

5°)- En appliquant le théorème du moment cinétique dans le repère R_1, déterminer les composantes de la réaction $\vec{R}$ dans la base $(\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3)$.



Exercice n°2

Dans le repère $R(Oxyz)$ muni de la base OND $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère une particule M qui se déplace dans le champ de forces suivant:

$$\vec{F}=(2x+6y+2z)\vec{i}+(6x-y+3z)\vec{j}+(2x+3y-z)\vec{k}.$$

1°)- Montrer que le champ de force $\vec{F}$ dérive d'un potentiel.

2°)- Calculer l'énergie potentielle, $E_p(x,y,z)$, dérivée par $\vec{F}$ (on donne $E_p(0,0,0)=0$).