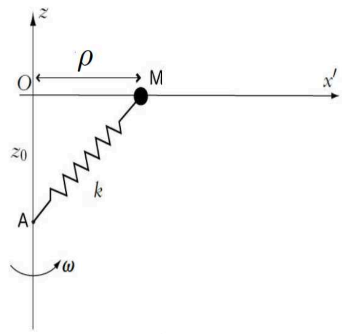
Université Cadi Ayyad
Faculté des Sciences
Semlalia-Marrakech
Département de Physique

Année Universitaire 2016/2017

Mécanique du Point Matériel
Corrigé de la Série N° 3
Filières SMIA

Corrigé 1 : PFD dans un référentiel non galiléen - Force élastique

Un point matériel M de masse m se déplace le long de l'axe Ox' sans frottement. L'axe Ox' tourne autour de Oz avec une vitesse angulaire ω constante, voir figure ci-contre. Le point matériel M est relié à l'extrémité d'un ressort de longueur à vide l_0 et de constante de raideur k. L'autre extrémité du ressort est fixée sur l'axe Oz, en A, à une distance z_0, voir figure ci-contre.



Soient $\mathcal{R}(Oxyz)$ le référentiel du laboratoire considéré galiléen et $\mathcal{R}'(Ox'y'z')$ le référentiel lié à l'axe Ox' tel que $(Oz') \equiv (Oz)$. On note par $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ la base cartésienne de $\mathcal{R}$ et $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{k}')$ et la base solidement liée à $\mathcal{R}'$. $\mathcal{R}'$ est pris pour le référentiel relatif avec $\vec{\Omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) = \omega\vec{k}$. On note par $\vec{u}$ le vecteur unitaire de (AM). Notons par $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

1. Le vecteur position est $\overrightarrow{OM} = \rho\vec{e}_\rho$. L'expression de l'accélération relative est donnée alors par

$$\begin{aligned} \vec{\gamma}(M/\mathcal{R}') &= \left.\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}\right|_{\mathcal{R}'} \\ &= \ddot{\rho}\vec{e}_\rho. \end{aligned}$$

   Quant à l'accélération d'entrainement, comme les origines des deux référentiels sont confondues et que la rotation de $\mathcal{R}'$ par rapport à $\mathcal{R}$ est uniforme, alors

$$\begin{aligned} \vec{\gamma}_e &= \vec{\Omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) \wedge \left(\vec{\Omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{OM}\right) \\ &= \rho\omega^2\vec{k}' \wedge \left(\vec{k}' \wedge \vec{e}_\rho\right) = -\rho\omega^2\vec{e}_\rho. \end{aligned}$$

   L'accélération de Coriolis est donnée par

$$\begin{aligned} \vec{\gamma}_c &= 2\vec{\Omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) \wedge \vec{V}(M/\mathcal{R}') \\ &= 2\dot{\rho}\omega\vec{k}' \wedge \vec{e}_\rho = 2\dot{\rho}\omega\vec{e}_\varphi. \end{aligned}$$

2. Le bilan des forces appliquées à M est
   — Le poids : $m\vec{g} = -mg\vec{k}'$;
   — La réaction de l'axe : $\vec{R}$. Comme M se déplace sans frottement alors cette dernière est normale à (Ox') et donc $\vec{R} = R_\varphi\vec{e}_\varphi + R_z\vec{k}'$.

— La force de rappel $\vec{F}$: si l est l'allongement du ressort , alors

$$\vec{F} \;=\; -k(l-l_0)\vec{u}.$$

Notons par $\alpha = (\widehat{OAM})$ alors $\vec{u} = \cos\alpha\vec{e}_\rho + \sin\alpha\vec{k}' = \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2+l_0^2}}\vec{e}_\rho + \frac{z_0}{\sqrt{\rho^2+z_0^2}}\vec{k}'$, ce qui donne pour la force de rappel

$$\begin{aligned}
\vec{F} &= -k\left(\sqrt{\rho^2+z_0^2}-l_0\right)\left[\frac{\rho}{\sqrt{\rho^2+z_0^2}}\vec{e}_\rho + \frac{z_0}{\sqrt{\rho^2+z_0^2}}\vec{k}'\right] \\
&= -k\left[\left(\rho - \frac{\rho l_0}{\sqrt{\rho^2+z_0^2}}\right)\vec{e}_\rho + \left(z_0 - \frac{z_0 l_0}{\sqrt{\rho^2+z_0^2}}\right)\vec{k}'\right]
\end{aligned}$$

3. Etant donné que $\mathcal{R}'$ n'est pas galiléen, le PFD dans ce référentiel s'exprime comme suit

$$\begin{aligned}
m\vec{\gamma}(M/\mathcal{R}') &= -mg\vec{k}' + \vec{R} + \vec{F} - m\vec{\gamma}_e - m\vec{\gamma}_c \\
m\ddot{\rho}\vec{e}_\rho &= -mg\vec{k}' + R_\varphi\vec{e}_\varphi + R_z\vec{k}' - k\left[\left(\rho - \frac{\rho l_0}{\sqrt{\rho^2+z_0^2}}\right)\vec{e}_\rho + \left(z_0 - \frac{z_0 l_0}{\sqrt{\rho^2+z_0^2}}\right)\vec{k}'\right] + \\
&\quad + m\rho\omega^2\vec{e}_\rho - 2m\dot{\rho}\omega\vec{e}_\varphi \\
&= \left[-k\left(\rho - \frac{\rho l_0}{\sqrt{\rho^2+z_0^2}}\right) + m\rho\omega^2\right]\vec{e}_\rho + \left[R_\varphi - 2m\omega\dot{\rho}\right]\vec{e}_\varphi + \\
&\quad + \left[-mg + R_z - k\left(z_0 - \frac{z_0 l_0}{\sqrt{\rho^2+z_0^2}}\right)\right]\vec{k}'
\end{aligned}$$

4. En projetant le PFD sur $\vec{e}_\rho$, on obtient l'équation du mouvement suivante

$$\begin{aligned}
m\ddot{\rho} &= -k\left(\rho - \frac{\rho l_0}{\sqrt{\rho^2+z_0^2}}\right) + m\rho\omega^2 \\
\Longrightarrow \ddot{\rho} &= \omega^2\rho - \frac{k}{m}\left(\rho - \frac{\rho l_0}{\sqrt{\rho^2+z_0^2}}\right) \\
&= \omega^2\rho - \omega_0^2\left(\rho - \frac{\rho l_0}{\sqrt{\rho^2+z_0^2}}\right) \\
&= \left[\omega^2 - \omega_0^2\left(1 - \frac{l_0}{\sqrt{\rho^2+z_0^2}}\right)\right]\rho
\end{aligned}$$

5. Les expressions des composantes non nulles de $\vec{R}$ sont obtenues en projetant le PFD sur $\vec{e}_\rho$ et $\vec{k}'$:

$$\begin{aligned}
R_\varphi &= 2m\omega\dot{\rho} \\
R_z &= mg + kz_0\left(1 - \frac{l_0}{\sqrt{\rho^2+z_0^2}}\right)
\end{aligned}$$

6. Les positions d'équilibres sont obtenues par

$$\ddot{\rho}\Big|_{\rho=\rho_e} \;=\; 0$$

$$\Longrightarrow \rho_e \left[\omega^2 - \omega_0^2\left(1 - \frac{l_0}{\sqrt{\rho_e^2 + z_0^2}}\right)\right] = 0$$

$$\Longrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \rho_e & = & 0 \\ \sqrt{\rho_e^2 + z_0^2} & = & \frac{l_0}{1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}} \Longrightarrow \rho_e = \pm\sqrt{\frac{l_0^2}{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2} - z_0^2} \end{array} \right.$$

notons que $\sqrt{\rho_e^2 + z_0^2} \geq 0$ ce qui implique que

$$1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} > 0 \Longrightarrow \omega < \omega_0$$

Notons que ω_0 est la pulsation propre du système (ressort+M). Aussi, pourqu'il y ait des positions d'équilibre autres que $\rho_e = 0$, il faut que la pulsation imposée au système soit inférieure à sa pulsation propre.

7. Posons $\rho = \rho_e + \epsilon = \epsilon \to 0$, alors

$$\left. \begin{array}{rcl} \ddot{\rho} & = & \ddot{\epsilon} \\ \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2+z_0^2}} & = & \frac{\epsilon}{z_0\sqrt{1+\frac{\epsilon}{z_0^2}}} \\ & \simeq & \frac{\epsilon}{z_0}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{\epsilon^2}{z_0^2}\right) \\ & \simeq & \frac{\epsilon}{z_0} \end{array} \right\} \Longrightarrow \ddot{\epsilon} = \omega^2\epsilon - \omega_0^2\epsilon\left(1 - \frac{l_0}{z_0}\right)$$

ce qui donne finalement

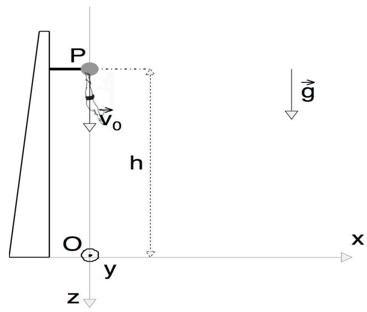
$$\ddot{\epsilon} - \left[\omega^2 - \omega_0^2\left(1 - \frac{l_0}{z_0}\right)\right]\epsilon = 0$$

et pour qu'il y ait une solution sinusoidale, il faut que

$$\begin{array}{rcl} \omega^2 - \omega_0^2\left(1 - \frac{l_0}{z_0}\right) & < & 0 \\ \Longrightarrow \omega & < & \omega_0\sqrt{\left(1 - \frac{l_0}{z_0}\right)} \text{ et } 1 - \frac{l_0}{z_0} \geq 0 \Longrightarrow l_0 \leq z_0. \end{array}$$

Corrigé 2 : Saut d'un plongeoir - Force de frottement fluide et poussée d'Archimède

Un baigneur assimilé à un point matériel P de masse m saute d'un plongeoir situé à une hauteur h au dessus de l'eau avec une vitesse initiale $\vec{v}_0$, voir figure ci-contre. Le point de chute à la surface d'eau est supposé O. Soit $\mathcal{R}(Oxyz)$ le repère lié au plongeoir, muni de la base cartésienne $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, considéré galiléen. Le baigneur est soumis uniquement à la pesanteur lors de la chute.



1. **Chute du plogueur**

i) La position du plongeur peut être repérée par $\overrightarrow{OP} = z\vec{k}$, étant donnée que sa chute se fait selon l'axe Oz, ce qui donne

$$\vec{V}(P/\mathcal{R}) = \dot{z}\vec{k} \text{ et } \vec{\gamma}(P/\mathcal{R}) = \ddot{z}\vec{k}.$$

ii) La seule force appliquée à P lors du plongeon est son poids $m\vec{g} = mg\vec{k}$, et comme $\mathcal{R}$ est galiléen le PFD

$$m\vec{\gamma}(P/\mathcal{R}) \quad = \quad mg\vec{k} \Longrightarrow \ddot{z} = g.$$

aussi, en intégrant l'équation précédente, nous avons $\dot{z}(t) = gt + K$ où $K = \dot{z}(t=0) = \vec{v}_0 \cdot \vec{k} = v_0 \Longrightarrow \dot{z}(t) = gt + v_0$. En intégrant cette dernière expression, nous obtenons

$$z(t) \quad = \quad \frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + K$$

où $K = z(t=0) = -h$ ce qui permet d'écrire finalement que

$$fz(t) \quad = \quad \frac{1}{2}gt^2 + v_0 t - h.$$

iii) Le temps de la chute t_c est obtenu quand le plongeur touche la surface d'eau, c'est à dire $z(t_c) = 0$, ce qui donne

$$\left.\begin{array}{rcl} z(t_c) & = & \frac{1}{2}gt_c^2 + v_0 t_c - h \\ z(t_c) & = & 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \frac{1}{2}gt_c^2 + v_0 t_c - h = 0 \Longrightarrow t_c^2 + \frac{2v_0}{g}t_c - \frac{2h}{g} = 0$$

qui est une équation de second degré dont le descriminant réduit est $\Delta' = \frac{v_0^2}{g^2} + \frac{2h}{g} > 0$ et donc l'équation a deux racines réelles et la solution physique est la racine positive

$$t_c \quad = \quad -\frac{v_0}{g} + \sqrt{\frac{v_0^2}{g^2} + \frac{2h}{g}}.$$

La valeur de la vitesse à la surface d'eau v_c est donnée par

$$v_c \quad = \quad gt_v + v_0 = -v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2gh} + v_0 = \sqrt{v_0^2 + 2gh}$$

2. **Plongueur dans l'eau**
Lorsque le baigneur est dans l'eau, il ne fait aucun mouvement. Il est soumis, en plus à la pesanteur, à la force de frottement fluide $\vec{f} = -k\vec{v}$ et à la poussée d'Archimède qui peut se mettre sous la forme $\vec{\Pi} = -\frac{1}{\lambda}m\vec{g}$, $k > 0$ et $0 < \lambda < 1$ sont des constantes.

i) Le PFD nous donne

$$m\vec{\gamma}(P/\mathcal{R}) \quad = \quad m\vec{g} + \vec{f} + \vec{\Pi}$$

et en projetant sur l'axe Oz, nous obtenons

$$m\ddot{z} \quad = \quad mg - kv_z - \frac{m}{\lambda}g = mg\left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) - kv_z \Longrightarrow \frac{dv_z}{dt} + \frac{k}{m}v_z = g\left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)$$

On pose $\tau = m/k$ ce qui donne finalement

$$\frac{dv_z}{dt} + \frac{1}{\tau}v_z \quad = \quad g\left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)$$

qui est une équation de premier ordre à coefficients constants avec second membre.

ii) La solution générale est la somme de la solution homogène v_{zs} et d'une solution particulière v_{zp}. Aussi

$$\frac{dv_{zs}}{dt}+\frac{v_{zs}}{\tau} = 0 \Longrightarrow v_{zs}=Ke^{-\frac{t}{\tau}}$$

et la solution particulière est

$$v_{zp} = g\tau\left(1-\frac{1}{\lambda}\right) \Longrightarrow v_z(t)=Ke^{-\frac{t}{\tau}}+g\tau\left(1-\frac{1}{\lambda}\right)$$

K étant déterminée par $v_z(t_c)=v_c$, ce qui donne

$$K = e^{\frac{t_c}{\tau}}\left[v_c-g\tau\left(1-\frac{1}{\lambda}\right)\right]=e^{\frac{t_c}{\tau}}\left[\sqrt{v_0^2+2gh}-g\tau\left(1-\frac{1}{\lambda}\right)\right]$$

et la solution générale est

$$v_z = \left[\sqrt{v_0^2+2gh}-g\tau\left(1-\frac{1}{\lambda}\right)\right]e^{-\frac{t-t_c}{\tau}}+g\tau\left(1-\frac{1}{\lambda}\right).$$

iv) Quant $t\to+\infty$, $e^{-\frac{t-t_c}{\tau}}\to 0$ et $v_z\to v_L=g\tau\left(1-\frac{1}{\lambda}\right)$.

iv) L'expression de v_z en fonction de $v_c=\sqrt{v_0^2+2gh}$ et $v_L=-g\tau(1/\lambda-1)$ est

$$v_z = (v_c-v_L)\,e^{-\frac{t-t_c}{\tau}}+v_L$$

Le baigneur comment à remonter lorsque sa vitesse de descente s'annulle et donc $v_z(t_1)=0$, ce qui donne

$$\left.\begin{array}{lcl} v_z(t_1) & = & (v_c-v_L)\,e^{-\frac{t_1-t_c}{\tau}}+v_L \\ v_z(t_1) & = & 0 \end{array}\right\}\Longrightarrow t_1 = t_c+\tau\mathrm{Log}\left(-\frac{v_L}{v_c-v_L}\right)$$
$$= t_c+\tau\mathrm{Log}\left(\frac{g\tau(1/\lambda-1)}{\sqrt{v_0^2+2gh}+g\tau(1/\lambda-1)}\right).$$

Notons que $0<\lambda<1$ ce qui permet d'affirmer que le logarithme est bien défini.

Corrigé 4 : Interaction entre particules chargées

On considère deux particules A(fixe) et B(mobile) de charges respectives q_A et q_B. On rappelle que la force de Coulomb est $\vec{F}_{B/A}=\frac{q_Aq_B}{4\pi\epsilon_0}\frac{\overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AB}\|^3}$. On néglige les poids des deux particules devant la force de Coulomb. Comme la particule A est fixe on peut prendre sa position comme origine et noter $\overrightarrow{AB}=\vec{r}$. Soit $\vec{u}_r$ le vecteur unitaire portant $\vec{r}$.

1. Calculons l'énergie potentielle dont dérive $\vec{F}_{B/A}$

$$\begin{aligned} dE_p &= -\vec{F}_{B/A}\cdot d\overrightarrow{AB} \\ &= -\frac{q_Aq_B}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{u}_r}{r^2}\cdot(dr\vec{u}_r+rd\vec{u}_r) \\ &= -\frac{q_Aq_B}{4\pi\epsilon_0}\frac{dr}{r^2}\Longrightarrow E_p=\frac{q_Aq_B}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r}+Cst(=0). \end{aligned}$$

2. Les deux charges sont de même signe et donc la force est répulsive. Pour établir l'expression de la distance minimale d'approche, comme la seule force qui travaille dérive d'un potentiel, il suffit d'utiliser le théorème de l'énergie mécanique pour la particule B. Comme la distance initiale est d_0 et la vitesse initiale est $\vec{v}_0$, ce qui donne pour l'énergie mécanique initiale

$$E_m(t=0) \quad = \quad E_c(t=0) + E_p(t=0) = \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{q_A q_B}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{d_0}.$$

Au moment où B est la plus proche possible de A, sa vitesse est nulle, et donc son énergie cinétique est nulle. De même à ce moment, la distance est d_{min} et donc son énergie potentielle est $E_p = \frac{q_A q_B}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{d_{min}}$. Comme l'énergie mécanique est conservée, alors

$$\begin{aligned} \frac{q_A q_B}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{d_{min}} &= \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{q_A q_B}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{d_0} \\ \Longrightarrow d_{min} &= \left(\frac{1}{d_0} + \frac{2\pi\epsilon_0 m v_0^2}{q^2}\right)^{-1}. \end{aligned}$$

On peut utiliser le théorème de l'énergie cinétique.

3. Comme les charges sont de signe opposé, la force est attractive et donc l'énergie potentielle est cette fois-ci négative. L'énergie mécanique à un instant t est donnée par

$$E_m \quad = \quad \frac{1}{2}mv^2 - \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r}.$$

Pour que la particule B s'éloigne de A, il faut que sont énergie cinétique soit supérieure à son énergie potentielle et donc son énergie mécanique positive

$$E_m \geq 0 \Longrightarrow \frac{1}{2}mv^2 - \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r} \geq 0$$

La vitesse minimale à communiquer à B, lorsque $r = d_0$, est celle correspondant à $E_m = 0$, ce qui implique que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mv_{min}^2 - \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{d_0} &\geq 0 \\ \Longrightarrow v_{min} &= \sqrt{\frac{q^2}{2m\pi\epsilon_0 d_0}} \end{aligned}$$