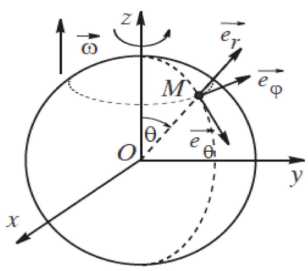
Université Cadi Ayyad
Faculté des Sciences
Semlalia-Marrakech
Département de Physique

Année Universitaire 2015/2016

Module de Mécanique du Point Matériel
Série $N^0$ 2
Filières SMA

## Exercice 1 : Déplacement selon un méridien

Une sphère de rayon $R$ tourne sur elle-même à une vitesse angulaire $\vec{\omega} = \omega\vec{k}$ constante dans un référentiel $\mathcal{R}(O, xyz)$ munis de la base cartésienne $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Un point matériel $M$ situé initialement au sommet se déplace sur la surface externe selon un méridien, du nord au sud, à vitesse constante $v_0$ par rapport à la sphère. Voir figure ci-contre.




1. Déterminer en coordonnées sphériques la vitesse et l'accélération de $M$ dans $\mathcal{R}$ en fonction du temps.

## Exercice 2 : Traversée d'une rivière

Un nageur traverse une rivière de largeur $l$ avec une vitesse $v_1$ par rapport à l'eau suivant une trajectoire perpendiculaire aux bords . Sachant que le courant d'eau coule avec une vitesse $v_0$ uniforme, calculer le temps de la traversée.

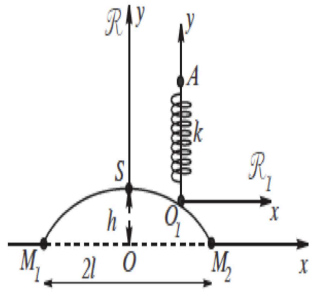
## Exercice 3 : Mouvement calculé à partir de la trajectoire et de l'hodographe

Dans le plan $(Oxy)$ d'un référentiel $\mathcal{R}(O, xyz)$ muni de la base cartésienne $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, un point mobile ponctuel $M$ décrit la parabole d'équation cartésienne $y^2 = 2px$ où $p$ est une constante positive. La vitesse $\vec{V}(M/\mathcal{R}) = X\vec{i} + Y\vec{j}$ est telle que l'ensemble des points $(X, Y)$, dont le graphique est appelé hodographe du mouvement de pôle $O$, a pour équation cartésienne $X^2 = 2qY$, $q$ étant une constante positive.

1. Exprimer $X$ et $Y$ en fonction $y$.
2. Exprimer l'accélération $\vec{\gamma}(M/\mathcal{R})$ de $M$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{OM}$. Préciser la nature du mouvement.
3. Etablir les expressions de $x$ et $y$ en fonction du temps $t$ sachant que $M$ passe en $O$ à l'instant initial $t = 0$.

## Exercice 4 : Mouvement d'un point matériel dans un véhicule accéléré

Un véhicule a un mouvement de translation uniforme de vitesse $\vec{V}(M/\mathcal{R}) = \vec{v}$ sur une route curviligne d'équation cartésienne $y = f(x)$. $\mathcal{R}(O, xyz)$ est le référentiel terrestre. Soit $\mathcal{R}_1(O_1, x_1y_1z_1)$ le référentiel lié au véhicule. Un point matériel $A$, de masse $m$, lié à l'origine $O_1$ par un ressort, évolue le long de l'axe $O_1y$. Voir figure ci-contre.




1. Etablir les expressions de la vitesse $\vec{V}(A/\mathcal{R}_1)$ et de l'accélération $\vec{\gamma}(A/\mathcal{R}_1)$ de $A$ et ce dans $\mathcal{R}_1$.
2. Etablir l'expression de la vitesse $\vec{V}(O_1/\mathcal{R})$ et de l'accélération $\vec{\gamma}(O_1/\mathcal{R})$ et montrer que sa composante selon $Oy$ est de la forme

$$\gamma_y(O_1/\mathcal{R}) = \frac{v^2 f''}{(f'^2 + 1)^2}$$

où $f'$ et $f''$ sont respectivement les dérivées première et seconde de $f(x)$ par rapport à $x$.

3. En déduire l'expression de $\vec{\gamma}(A/\mathcal{R})$.

## Exercice 5 : Arme à l'ancienne

L'une des armes utilisée au Moyen-Âge pour envoyer des charges lourdes contre les murailles était ce que l'on appelle "un trébuchet" ou le catapulte. Il est composé d'une poutre $AB$ à laquelle est fixée un contrepoids en A. En $B$ est attachée une corde au bout de laquelle une poche contient le projectile $M$, voir figure ci-contre.
Soit $\mathcal{R}(Oxyz)$ le repère lié au sol et $\mathcal{R}_B(Ax_1y_1z_1)$ le repère lié à la poutre. Le mouvement a lieu dans le plan $(Oxy)$. La base polaire $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi)$ est liée à $\mathcal{R}_B$. On donne $OB = a$ et $BM = b$.

**Les grandeurs vectorielles doivent être exprimées dans la base polaire $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta)$.**

1. Quel est le mouvement de $\mathcal{R}_B$ par rapport à $\mathcal{R}$ ? En déduire le vecteur rotation $\vec{\Omega}(\mathcal{R}_B/\mathcal{R})$.
2. On suppose que la corde BM reste tendue. Etablir l'expression de $\vec{V}(M/\mathcal{R}_B)$.
3. Déterminer le vecteur $\overrightarrow{OM}$ et déduire la vitesse d'entrainement $\vec{V}_e$ en $M$.
4. Le projectile est lâché lorsque $\theta = \pi$ et $\varphi = 0$ ($AOBM$ vertical).

   **a-** Déterminer la vitesse de $M$ dans $\mathcal{R}$, $\vec{V}(M/\mathcal{R})$, en fonction de $a, b, \dot{\varphi}$ et $\dot{\theta}$.

   **b-** Montrer que la vitesse obtenue est plus grande que s'il n'y avait qu'un seul bras rigide de longueur $a + b$.