Université Cadi Ayyad
Faculté des Sciences
Semlalia-Marrakech
Département de Physique

Année Universitaire 2017/2018

Module de physique - Mécanique du Point Matériel
Filière S1 SMA - Série N° 4

Exercice 1 : Energie mécanique et trajectoire

Considérons un point matériel M de masse m soumis à l'interaction gravitationnelle par une masse ponctuelle M_s située au point O. Soit le référentiel galiléen $\mathcal{R}(O, XYZ)$.

1. Montrer que le moment cinétique est conservé. En déduire que le mouvement est plan.
   On choisit $\mathcal{R}$ tel que le mouvement de M soit dans le plan (OXY). On utilise dans la suite de l'exercice les coordonnées polaires (ρ, φ).
2. Calculer l'énergie cinétique E_c et l'énergie potentielle E_p de M en prenant $\lim_{\rho\to+\infty} E_p(\rho) = 0$. En déduire que l'énergie mécanique de M est donnée par
   $$E_m = \frac{1}{2}m\dot{\rho}^2 + \frac{mC^2}{2\rho^2} + \frac{K}{\rho}$$
   en explicitant l'expression de K et de la constante des aires C.
3. On pose $\rho = \frac{1}{u}$. Retrouver l'expression de $E_m = f(u, \frac{du}{d\varphi})$.
4. En utilisant le théorème de l'énergie mécanique, montrer que l'équation du mouvement en $u(\varphi)$ est
   $$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = -\frac{K}{mC^2}$$
5. Résoudre l'équation du mouvement en $u(\varphi)$. En déduire que l'équation du mouvement en $\rho(\varphi)$ est de la forme
   $$\rho = \frac{p}{1 + e\cos(\varphi - \varphi_0)}.$$
   Quelle est la nature de la trajectoire en précisant les expressions de p et de e ?
6. En utilisant l'expression de E_m en fonction de $u(\varphi)$, montrer que
   $$E_m = \frac{GM_s m}{2p}\left(e^2 - 1\right).$$
   Discuter la nature de la trajectoire en fonction de e et déduire le signe de E_m pour chaque type de trajectoire.
7. En utilisant la conservation de l'énergie mécanique, déduire que l'excentricité dans ce cas est donnée par $e = \sqrt{1 + \frac{pV_0^2}{GM_s} - \frac{2p}{\rho_0}}$ où $\rho(t = 0) = \rho_0$ et $|\vec{V}(M/\mathcal{R})|(t = 0) = V_0$.

Exercice 2 : Cas d'une trajectoire circulaire

On reprend les résultats de l'exercice précédent.

1. A quelle condition la trajectoire de M est circulaire ? On suppose que cette condition est vérifiée dans la suite de l'exercice et on note le rayon de la trajectoire par $\rho = R$.
2. En utilisant le PFD, montrer que le mouvement circulaire est <u>uniforme</u>. En déduire que l'expression du module de la vitesse de M en fonction de R est donnée par $|\vec{V}(M/\mathcal{R})| = \sqrt{\frac{GM_s}{R}}$.
3. Montrer que la période de révolution T de M est donnée par $T^2 = \frac{4\pi^2R^3}{GM_s}$. Commenter ce résultat.

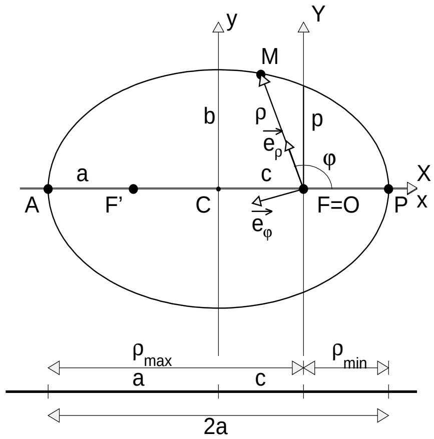
4. Montrer que l'énergie mécanique E_m dans ce cas vérifie les relations suivantes $E_m = -E_c = \frac{1}{2}E_p$ où E_c et E_p sont respectivement les énergies cinétique et potentielle.

Exercice 3 : Cas d'une trajectoire elliptique

On utilise les résultats de l'exercice 1.

1. A quelle condition le mouvement de M est elliptique ? On suppose que c'est le cas pour le reste de l'exercice avec $\varphi_0 = 0$.
2. La figure ci-contre, représente l'ellipse dans le référentiel $\mathcal{R}$ où le foyer F de l'ellipse est confondu avec O. Soit $\mathcal{R}'(C, xyz)$ un référentiel immobile par rapport à $\mathcal{R}$, voir figure.
3. Donner les équations de l'ellipse dans $\mathcal{R}$ et dans $\mathcal{R}'$ en fonction de p et de e.
4. En utilisant les notations de la figure, montrer que les expressions des paramètres géométriques de l'ellipse sont

$$\begin{aligned} \rho_{min} &= p/(1+e) \\ \rho_{max} &= p/(1-e) \\ \text{a} &= p/(1-e^2) \\ \text{b} &= p/\sqrt{1-e^2} \\ \text{c} &= ep/(1-e^2) \end{aligned}$$

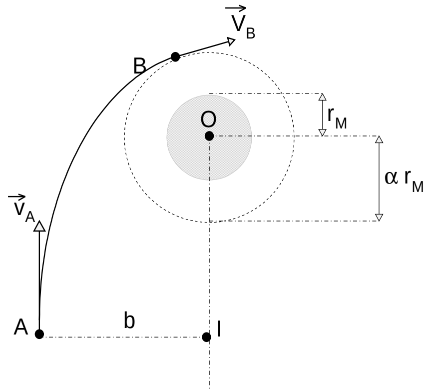


5. Calculer les vitesses de M respectivement à l'apogée, A, et à la périgée, P en fonction de (p, e, G, M_s).
6. En déduire que $E_m = -\frac{GM_s m}{2a}$.

Dans la suite de la série, on utilise les résultats des exercices précédents sans les redémontrer.

Exercice 4 : Mise en orbite d'une sonde spatiale

On souhaite mettre une sonde spatiale S de masse m_S en orbite autour de Mars. La vitesse de la sonde au point de lancement A est $\vec{V}_A$ et présente un "paramètre d'impact" b, voir figure ci-contre.



1. On suppose qu'au point A la sonde S est trés éloignée de Mars et que l'on peut ainsi négliger l'énergie gravitationnelle. Calculer l'énergie mécanique de la sonde S au point A et déduire la nature de sa trajectoire.
2. Calculer la constante des aires C en fonction de V_A et b.
3. Sachant que la trajectoire d'approche est tangente au cercle de rayon αr_M en B, calculer le module de la vitesse en B, V_B, en fonction de V_A, r_M, α et b.
4. Exprimer le paramètre d'impact b en fonction de r_M, V_A, la masse de Mars M_M et α. En déduire la valeur du paramètre d'impact b_o pour que la sonde se pose sur la surface de Mars.
5. Déterminer le module de la vitesse V_{orb} d'un objet sur l'orbite circulaire de rayon αr_M.
6. On veut que la sonde passe sur l'orbite circulaire de rayon αr_M. Calculer la variation de vitesse à communiquer à la sonde au point B.