TD 1 Physique générale, cinématique du point (1)

1.1 Calcul vectoriel

L'espace étant rapporté à un repère orthonormé de vecteurs de base $(\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, \overrightarrow{e}_3)$, soient deux vecteurs $\overrightarrow{A}$ et $\overrightarrow{B}$ définis comme suit :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{A} &= 3\overrightarrow{e}_1 + 4\overrightarrow{e}_2 \\ \overrightarrow{B} &= -\overrightarrow{e}_1 + 2\overrightarrow{e}_2 \end{aligned}$$

1. Calculer $\| \overrightarrow{A} \|$, $\| \overrightarrow{B} \|$ et $\| \overrightarrow{A} + \overrightarrow{B} \|$.
2. Déterminer l'angle θ que font entre eux les vecteurs $\overrightarrow{A}$ et $\overrightarrow{B}$.
3. Déterminer les composantes u_1 et u_2 du vecteur unitaire $\overrightarrow{u}$ porté par le vecteur $\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B}$.
4. Déterminer les angles α, β et γ que fait le vecteur $\overrightarrow{u}$ avec les vecteurs $\overrightarrow{e}_1$, $\overrightarrow{e}_2$ et $\overrightarrow{e}_3$ respectivement.
5. Calculer les composantes du vecteur $\vec{C} = \vec{A} \wedge \vec{B}$.
6. Soit le triangle (OM_1M_2) défini par les extrémités des vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$: $\overrightarrow{OM_1} = \vec{A}$ et $\overrightarrow{OM_2} = \vec{B}$. Montrer que l'aire du triangle (OM_1M_2) peut s'exprimer en fonction de $\| \overrightarrow{A} \|$, $\| \overrightarrow{B} \|$ et θ. Vérifier qu'elle peut aussi être obtenue par la relation $\mathcal{A} = \frac{1}{2}\|\vec{A} \wedge \vec{B}\|$.

1.2 Ballistique (1)

On considère dans un plan (xOy) les trajectoires de points ayant une accélération constante $\overrightarrow{\gamma} = -g\overrightarrow{e}_y$ et une vitesse initiale $\overrightarrow{v}_0$ faisant l'angle α avec l'axe $\overrightarrow{Ox}$.

a. Déterminer l'équation de la trajectoire.

b. Déterminer la flèche de la trajectoire (altitude maximale atteinte). Pour quel angle α la flèche est-elle maximale ?

c. Déterminer la portée D (distance entre O et le point de chute sur le plan horizontal $z = 0$). Pour quel angle α la portée D est-elle maximale ?
Calculer pour cet angle la portée et la flèche de la trajectoire.

Données : $g = 9,81 m.s^{-2}$, $\|\vec{v}_0\| = 30 m.s^{-1}$

1.3 Ballistique (2)

On considère dans un plan (xOy) les trajectoires de points ayant une accélération constante $\overrightarrow{\gamma} = -g\,\overrightarrow{e}_y$ et une vitesse initiale $\overrightarrow{v}_0$ faisant l'angle α avec l'axe $\overrightarrow{Ox}$.

1. Montrer qu'il existe deux valeurs de α pour lesquelles ces trajectoires, issues de l'origine O, atteignent une même cible C.
2. En déduire l'équation de la courbe enveloppe de toutes les trajectoires correspondant à une même valeur de la norme de $\overrightarrow{v_0}$.

1.4 Position, vitesse et accélération

1. Un mobile est soumis à une accélération constante $\vec{\gamma}$, avec $\|\vec{\gamma}\| = 1\,\text{m.s}^{-2}$. A l'instant initial, sa vitesse est nulle. Quelle est la vitesse du mobile lorsque celui-ci a parcouru 3 mètres ?
2. Un point matériel se déplace le long d'une courbe dont les équations paramétriques en fonction du temps sont données par :

$$\begin{cases} x(t) = \cos 3t \\ y(t) = \sin 3t \\ z(t) = 3t \end{cases}$$

   (a) Décrire la trajectoire du point matériel.

   (b) Trouver sa vitesse et son accélération à un instant donné.

   (c) Trouver les modules de la vitesse et de l'accélération à l'instant initial.

3. Une particule se déplace avec une accélération donnée par :

$$\overrightarrow{\gamma} = 2\exp(-t)\,\overrightarrow{e_x} + 5\cos t\,\overrightarrow{e_y} - 3\sin t\,\overrightarrow{e_z}$$

   Si au temps t = 0 la particule est située en $(1, -3, 2)$ et si sa vitesse est alors $(4, -3, 2)$, trouver la vitesse et le déplacement de la particule pour un temps $t > 0$.

TD 2 Cinématique du point (2)

2.1 Vitesse et position d'une voiture

Une voiture, initialement à l'arrêt, se déplace en ligne droite. Un accéléromètre embarqué sur le véhicule a enregistré le graphe ci-dessous, indiquant l'évolution de l'accélération tangentielle (en module) avec le temps.

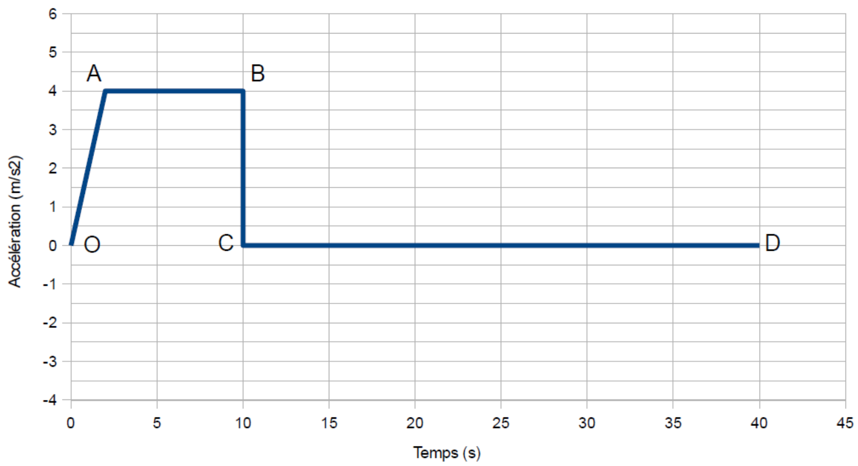


FIG. 1 – mesure d'accélération

1. Calculer la vitesse et la position de la voiture à la fin des différentes phases d'accélération (A, B, C, D). A quelle distance du départ la voiture se trouve-t-elle après 40 secondes ? Quelle est alors sa vitesse ?
2. Que deviennent les résultats précédents si la voiture ne roule pas en ligne droite ?

2.2 Mouvement d'un ballon-sonde

Un ballon-sonde a une vitesse d'ascension verticale v_0 indépendante de son altitude z ($\overrightarrow{Oz}$ est la verticale ascendante). Il est soumis à un vent qui lui communique une vitesse horizontale et proportionnelle à son altitude $u = z/\tau$.

1. Déterminer les lois horaires du mouvement $x(t)$ et $z(t)$ ainsi que l'équation de la trajectoire $x(z)$.
2. Calculer l'accélération du ballon-sonde. Déterminer ses composantes normale et tangentielle à la trajectoire.

2.3 Trajectoire tridimensionnelle

Les coordonnées d'un point sont données en fonction du temps t par les relations suivantes :

$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = 1 - 2t^2 \\ z(t) = 4t^2 + 3t \end{cases}$$

2. Ecrire les composantes de la vitesse du point et en déduire son module.
3. Ecrire les composantes de l'accélération et en déduire son module.
4. Calculer les composantes tangentielle et normale de l'accélération. Quel est le rayon de courbure de la trajectoire ?

TD 3 Cinématique du point (3). Coordonnées curvilignes

3.1 Calculs élémentaires

1. Une courbe a pour équation cartésienne : $x^2 + y^2 = 4$. Quelle est son équation en coordonnées polaires ?
2. Une courbe a pour équation cartésienne $x = y = z$. Quelle est son équation dans le système de coordonnées cylindrique ?

5. Le point M a pour coordonnées $r = t^2$, $\theta = 3t$, $z = t$ dans le système de coordonnées cylindrique. Déterminez les composantes du vecteur $\vec{V}$, dérivée du vecteur position $\overrightarrow{OM}$ par rapport au temps t dans le système de coordonnées cylindrique. De même, déterminer les composantes du vecteur accélération.

☺ Attention aux notations : ici, on note r (au lieu de ρ) le rayon

3.2 Quelques variations autour d'une trajectoire

1. Une particule ponctuelle M se déplace dans le plan (xOy). Elle est repérée par son vecteur position, exprimé en coordonnées polaires : $\overrightarrow{OM} = \rho \vec{e}_\rho$.
   (a) Quelle est la trajectoire de la particule si $\rho = a = c^{te}$? Calculer les composantes du vecteur vitesse et accélération. Que deviennent ces résultats si le mouvement est uniforme ?
   (b) Que devient la trajectoire de la particule si $\rho = at$, avec $a = c^{te}$ et $\omega = c^{te}$?

2. On considère à présent le mouvement d'une particule M, dont le vecteur position, exprimé en coordonnées cylindriques, s'écrit : $\overrightarrow{OM} = a\vec{e}_\rho + h\phi\vec{e}_z$ avec a, h constantes.
   (a) Décrire la trajectoire parcourue par M si $\omega = \dot{\phi} = c^{te}$.
   (b) Etablir l'expression générale de la vitesse et de l'accélération de M en coordonnées cylindriques si ϕ est quelconque.
   (c) Montrer que le vecteur vitesse fait un angle constant avec le plan (xOy).
   (d) Calculer les composantes tangentielle et normale de l'accélération. En déduire une expression pour les vecteurs unitaires $\vec{\tau}$ et $\vec{n}$ de la base de Frenet associée à la trajectoire. Donner l'expression générale de son rayon de courbure.
   (e) Quelle condition doit-on vérifier pour obtenir un mouvement uniforme ? Montrer que dans ce cas $\vec{\gamma}$ est normal en tout point de la trajectoire et que ce vecteur est également parallèle au plan (xOy). Que devient le rayon de courbure de la trajectoire ?

3. On considère enfin le mouvement d'une particule M, dont le vecteur position exprimé en coordonnées cylindriques s'écrit : $\overrightarrow{OM} = at\overrightarrow{e}_\rho + h\phi\overrightarrow{e}_z$.

   (a) Décrire la nouvelle trajectoire parcourue par la particule si $\omega = \dot{\phi} = c^{te}$.

   (b) Dans le cas d'un mouvement uniforme, les propriétés montrées à la question (2.e) sont-elles encore vérifiées ?

3.3 Longueur d'une trajectoire en coordonnées polaires

Un objet décrit une trajectoire définie en coordonnées polaires par l'équation $\rho = \rho_0\,(1 + \cos\phi)$, où $\rho_0 = 30\text{cm}$.

1. Etudier ce mouvement dans le cas où $\dot{\phi} = \omega = c^{te} > 0$. Pour cela, déterminer la vitesse et l'accélération du mobile en tout point de la trajectoire et déterminer l'allure de cette dernière.
2. Calculer la longueur L de cette trajectoire.

☺ Attention aux notations : ici, on note ϕ (au lieu de θ) l'angle polaire. Parfois il y a un point au dessus de ϕ : c'est la dérivée par rapport au temps.

TD 4 Cinématique du point (4). Compositions des vitesses

4.1 Loi de composition des vitesses

A l'instant initial $t = 0$, on fait rouler un objet avec la vitesse de $10\,\mathrm{m.s^{-1}}$ sur le sol d'un ascenseur. Celui-ci part du repos au sol à $t = 0$ et subit une accélération vers le haut de $3\,\mathrm{m.s^{-2}}$.

1. Quelle est la trajectoire $x(t)$ et $y(t)$ de l'objet par rapport à un référentiel terrestre galiléen dont l'origine est au repos au point de départ du sol ?
2. Dessiner le chemin de l'objet tel qu'un observateur le voit à partir du référentiel accéléré vers le haut.

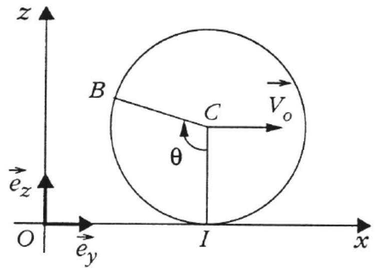
4.2 Effet du vent sur le temps de parcours d'un avion

On suppose qu'un avion va du point A dans une direction plein nord vers le point B puis retourne au point A. La distance de A à B est L. La vitesse de l'avion par rapport à l'air est v et la vitesse du vent est v'.

1. Montrer que le temps mis pour faire l'aller retour en air calme (v'=0) est t_a = 2L / v.
2. Montrer que le temps mis pour faire l'aller-retour quand le vent est dirigé plein est (ou plein ouest) est :
$$t_b = \frac{t_a}{\sqrt{1 - \frac{v'^2}{v^2}}}$$
3. Montrer que le temps mis pour faire l'aller-retour quand le vent est dirigé plein nord (ou plein sud) est :
$$t_c = \frac{t_a}{1 - \frac{v'^2}{v^2}}$$
4. Les voyages précédents sont ils faisables quand $v' = v$?
5. Pour un v' donné, quel est de t_b ou t_c le temps le plus long ?

4.3 Roulement sans glissement

Une roue de rayon R roule sans glisser selon un axe rectiligne $\overrightarrow{Ox}$. Un point B, situé à la périphérie de la roue, coïncide à l'instant initial avec l'origine O du repère. Le centre C de la roue a une vitesse $\vec{V_0}$ positive, constante, parallèle à $\overrightarrow{Ox}$.



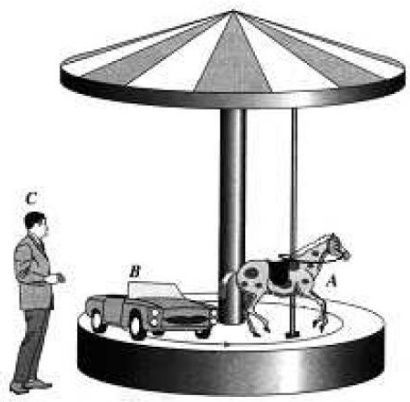
1. Déterminer les coordonnées $x(t)$ et $z(t)$ du point B. On introduira $\theta(t)$, angle dont la roue a tourné depuis l'instant initial. Donner l'allure générale de la trajectoire.
2. Calculer la vitesse $\overrightarrow{V}$ du point B, et étudier ses variations.
3. Calculer l'accélération $\overrightarrow{\gamma}$ du point B , et préciser son orientation.
4. En introduisant un référentiel d'origine C en translation par rapport au précédent, montrer qualitativement comment il est possible de retrouver les résultats de la deuxième question.

4.4 Manège

Un observateur, sur une fête foraine, regarde depuis le sol un manège. Il observe un cheval animé d'un mouvement alternatif vertical par rapport au plateau du manège, et une voiture fixée à ce même plateau.

On note $\Re_A$, $\Re_B$ et $\Re_C$ les référentiels respectivement associés au cheval, à la voiture et à l'observateur. La voiture se trouve à une distance de 5m de l'axe de rotation du manège, et l'observateur à une distance de 10m de cet axe.

1. Quel(s) référentiel(s) peut-on qualifier de galiléen(s) ?
2. Décrire schématiquement la trajectoire du cheval dans chacun des référentiels, et la trajectoire de l'observateur dans le référentiel $\Re_B$.



TD 5 Forces et moments

5.1 Equations aux dimensions. Analyse dimensionnelle

1. La force d'attraction qui s'exerce entre deux points matériels de masses m et m', séparés par une distance r, est donnée en module par la loi de Newton :

$$F = G\frac{mm'}{r^2}$$

   Donner les dimensions de la constante de gravitation universelle G.
2. L'expérience montre que la force subie par une sphère immergée dans un fluide en mouvement lent (écoulement laminaire) dépend du coefficient de viscosité η du fluide, du rayon r de la sphère, et de la vitesse relative v de la sphère par rapport au fluide. Trouver l'expression générale de cette force, sachant que $[\eta] = L^{-1}MT^{-1}$.

5.2 Etude de Jupiter par sondes spatiales

En mars 1979, la sonde spatiale Voyager 1, s'approchant de Jupiter à une altitude z_1, mesure le champ gravitationnel g_1 crée par cette planète. Quelques mois plus tard, Voyager 2 mesure à l'altitude z_2 un champ gravitationnel g_2. En déduire :

1. La valeur de la masse de Jupiter.
2. Le rayon de cette planète supposée sphérique, ainsi que sa masse volumique.
3. L'intensité du champ gravitationnel à sa surface.

A.N. : $z_1 = 278000$km, $g_1 = 1,04$N.kg^{-1}, $z_2 = 650000$km, $g_2 = 0,243$N.kg^{-1}.

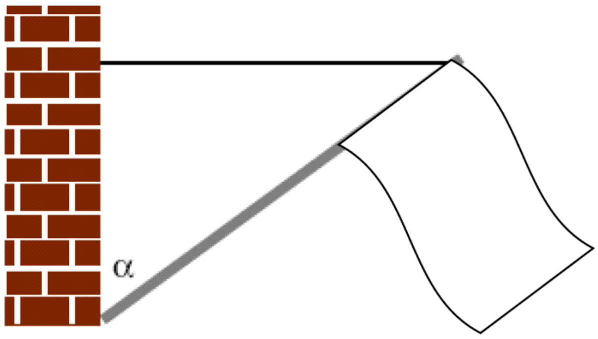
5.3 Effet Hall

Une sonde à effet Hall est constituée d'un conducteur traversé par un courant selon un axe $\overrightarrow{Ox}$. En présence d'un champ magnétique $\overrightarrow{B}$ perpendiculaire à $\overrightarrow{Ox}$, les électrons sont déviés. Il apparaît alors une tension sur les faces de la sonde.

1. Exprimer la force subie par un électron dans le champ magnétique.
2. En déduire le rayon de courbure de la trajectoire des électrons.
3. L'accumulation des électrons sur les faces de la sonde provoque un champ électrique perpendiculaire au courant. Dans quel sens est la force correspondante ?
4. Déterminer la valeur du champ pour laquelle la trajectoire des électrons est rectiligne.

5.4 Equilibre d’un drapeau

Un drapeau de masse 10 kg est maintenu par un cable horizontal de masse négligeable, le pied du drapeau étant en appui sur un mur (figure). Si le cable supporte une tension maximale de 70 N, quelle est la valeur maximale de l’angle α ? (le centre de masse est supposé être au centre de la tige)



TD 6 Dynamique du point matériel (1)

6.1 Calculs élémentaires

Une locomotive tire 3 wagons identiques, chacun de masse 2000 kg, et reliés entre eux par des connexions de masses négligeables. Le train roule sans frottements sur une surface horizontale. L'accélération mesurée de l'ensemble des trois wagons est de 7 m.s^{-2}.

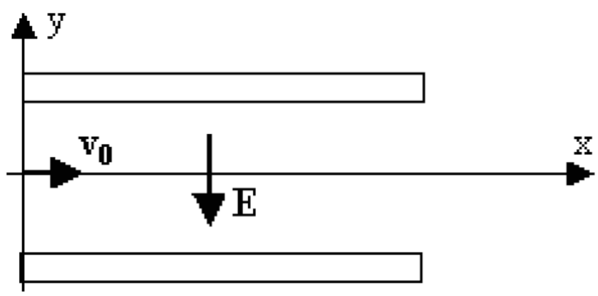
1. Calculer la force F fournie par la locomotive.
2. Calculer les tensions dans chaque élément de connexion.

6.2 Parachutisme

Un parachutiste de masse M =80 kg a sur le dos un parachute de masse m =20 kg. Il saute hors d'un avion en vol, il subit alors une chute libre (supposée sans frottement) jusqu'à atteindre une vitesse v_0. Une fois le parachute ouvert, celui-ci est soumis à la résistance de l'air, assimilable à une force de frottement de module $F = \alpha V^2$, avec $\alpha = 20\,\text{kg.m}^{-1}$. On prendra $g = 10\,\text{m.s}^{-2}$, et on supposera que le mouvement se fait uniquement suivant l'axe vertical.
1. Quelle est l'équation différentielle du mouvement selon l'axe vertical ?
2. Quelle est la vitesse limite atteinte par le parachutiste au cours de sa chute ?
3. Montrer que cette vitesse est égale à la vitesse d'une personne sautant en chute libre (sans frottement) d'une hauteur h que l'on précisera.

6.3 Etude d'un condensateur

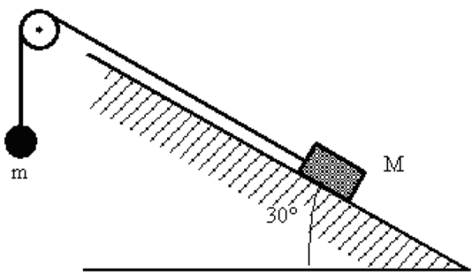
Une particule de charge q et de masse m pénètre avec une vitesse initiale $v_0.\vec{e}_x$ dans un champ électrique $\vec{E} = -E.\vec{e}_y$ produit par les plaques d'un condensateur plan. $\vec{E}$ est supposé uniforme entre ces plaques de longueur L (on négligera tout effet de bord).



1. Quelles forces agissent sur la particule dans les directions $\overrightarrow{Ox}$ et $\overrightarrow{Oy}$?
2. Une force dans la direction $\overrightarrow{Oy}$ peut-elle influencer la composante v_x de la vitesse ?
3. Ecrire l'expression vectorielle de la vitesse de la particule.
4. Calculer les composantes du vecteur position de la particule entre les plaques du condensateur. On prendra l'origine des coordonnées au point d'entrée dans le condensateur.

6.4 Dynamique du point matériel et frottement solide

Soit le système représenté par la figure suivante avec $M = 1\text{kg}$; $\mu_s = 0,6$ et $\mu_c = 0,4$ sont respectivement les coefficients de frottement statique et cinétique.



1. Pour quelles valeurs de m le système reste-t-il statique ?
2. On met M en mouvement. Pour quelles valeurs de m glisse-t-il vers le haut ou vers le bas à vitesse constante ? Quelle est la tension de la corde dans ce cas ?
3. La masse m est différente des valeurs précédentes. Trouver l'accélération de M quand elle descend sur le plan incliné. Quelle est alors la tension du fil ?

Rq : On négligera l'inertie de la corde et de la poulie devant m et M. La corde est supposée inextensible.

6.5 Mouvement d'une fronde

Une fronde est constituée d'une masse m reliée à un point fixe O par l'intermédiaire d'un fil de longueur ℓ et de masse négligeable. A partir de sa position d'équilibre, on lance la masse m avec une vitesse initiale v_0 horizontale. On néglige l'effet des forces de frottements visqueuses.

1. Quelle valeur doit-on donner à v_0 pour que le fil reste tendu au cours du mouvement ?
2. Si la vitesse initiale est inférieure à la valeur déterminée à la question précédente, calculer l'angle que fait le fil avec la verticale lorsque le fil cesse d'être tendu. Quel est le mouvement ultérieur de la masse m.

☺ Il manque une précision à la question 2. En fait si la vitesse est trop faible (inférieure à une certaine vitesse à déterminer), alors la masse m a un mouvement de balancier (pendule).

TD 7 Dynamique du point matériel (2)

7.1 Forces dues à un champ magnétique. Fréquence cyclotron

Une charge q de masse m est placée dans un champ magnétique B_0 uniforme dirigé suivant Oz positif. A l'instant initial $t = 0$, on a les conditions $x = a$, $y = 0$, $\dot{x} = 0$ et $\dot{y} = v_0$.

1. Rappeler l'expression de la force qui s'exerce sur la charge, du fait de l'existence du champ magnétique.
2. Montrer, à l'aide du PFD, que la vitesse de la particule est constante et que la trajectoire dans le plan (xOy) est un cercle dont on déterminera le rayon R. Quelle est la période T du mouvement ?
3. Montrer que les équations du mouvement dans le plan (xOy) sont données par :

$$\begin{cases} x(t) = a + \frac{mv_0}{qB_0}(1 - \cos\omega t) \\ y(t) = \frac{v_0}{\omega}\sin\omega t \end{cases}$$

   avec $\omega = 2\pi/T$. Existe-t-il une composante $z(t)$?

7.2 Balistique et frottements visqueux

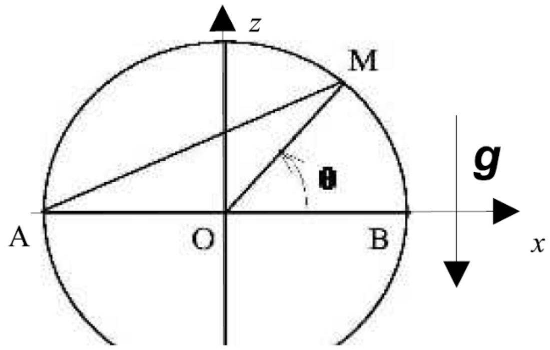
Un projectile ponctuel M de masse m est lancé dans un plan vertical (Oxz) avec une vitesse initiale $\overrightarrow{v_0}$ faisant un angle α avec l'horizontale Ox. Ce projectile est soumis à une force de frottement visqueuse due à l'air, dont le module est proportionnel à la vitesse instantanée de M. On considère d'autre part que l'accélération de la pesanteur est constante.

1. Etablir les équations du mouvement.
2. Exprimer les vitesse et position du projectile en fonction des données du problème. Montrer que la trajectoire de M admet une asymptote verticale et que sa vitesse tend vers une limite que l'on précisera.

7.3 Dynamique – Equilibre

Un point M de masse m glisse sans frottement sur une circonférence de centre O et de rayon a placée dans un plan vertical. Soit AB le diamètre horizontal de ce cercle. On repère la position par l'angle $\theta = (\vec{OB}, \vec{OM})$. Le point M reste en permanence en contact avec la circonférence.

Un ressort de raideur k, lié à M et à A exerce une force $\vec{f} = -k.\vec{AM}$ sur le point M. (la force $\vec{f}$ est nulle lorsque M et A sont confondus).



1. Faire le bilan des forces qui s'exercent sur le point M, donner leurs expressions dans le système de coordonnées polaires.
2. Ecrire le principe fondamental de la dynamique pour le point M situé en un point quelconque de la circonférence dans le système de coordonnées polaires.
3. Déterminer la ou les position(s) d'équilibre du point M
4. Indiquer si ces positions sont stables ou non.

TD 8 Aspect énergétiques (1)

8.1 Travail et énergie cinétique

1. Calculer le travail de la force gravitationnelle pour un objet de masse m=1kg élevé depuis le sol jusqu'à une altitude de :
   (a) 100 m.
   (b) 100 km.
2. Une force $F = 6t$ (N) agit sur une particule de masse 2 kg. La particule étant immobile au départ, trouver le travail effectué par la force pendant les deux premières secondes.
3. Calculer le travail fourni en déplaçant un point matériel le long d'un cercle C contenu dans le plan (xOy), si C est centré à l'origine, a un rayon de 3m, et si le champ de force agissant sur la particule est donné par :
$$\overrightarrow{F} = (2x - y + z)\,\overrightarrow{e_x} + \left(x + y - z^2\right)\overrightarrow{e_y} + (3x - 2y + 4z)\,\overrightarrow{e_z}$$
4. Un point matériel de masse m se déplace dans le plan (xOy), son vecteur position étant donné par :
$$\overrightarrow{r} = a\cos\omega t\,\overrightarrow{e_x} + b\sin\omega t\,\overrightarrow{e_y}$$
   où a, b et ω sont des constantes positives telles que $a > b$.
   (a) Calculer l'énergie cinétique du point matériel aux points $A(a, 0)$ et $B(0, b)$.
   (b) Calculer le travail fourni par le champ de force en déplaçant le point matériel de A à B.
   (c) Vérifier le théorème de l'énergie cinétique.
   (d) Montrer que le travail total effectué en faisant faire au point matériel une fois le tour de l'ellipse est nul.

8.2 `Flipper géant'

Un ressort de raideur $k = 10^6$ N/m est utilisé pour catapulter une masse $m = 1$ kg dans la direction verticale. Le ressort est initialement comprimé d'une valeur $\Delta l = l - l_0 = -5$ m. Déterminer la vitesse de la masse quand le ressort retrouve sa longueur de repos. En déduire l'altitude maximale que peut atteindre le projectile.

8.3 4x4 de grande marque…

On considère un 4×4 de ville de grande marque , assimilé à un point matériel, noté Q_7.
Le point Q_7 roule sur une autoroute horizontale sur une distance de $L = 30\,km$ à vitesse constante $\vec{v} = v\overrightarrow{T}$.
Il est alors soumis aux forces visqueuses de l'air, données par :

$$\overrightarrow{F} = F_T\overrightarrow{T}, \quad \text{avec,} \quad F_T = -q\,S\,C_x \quad \text{et} \quad q = \frac{1}{2}\rho\,v^2 \tag{2}$$

Données

- $\rho = 1,293\,kg.m^{-3}$, *la masse volumique de l'air ;*
- $C_x = 0,34$, *le coefficient de forme du véhicule ;*
- $S = 1,737 \times 1,983\,m^2$, *la surface projetée ;*
- $M_7 = 2,3\,t$, *la masse du véhicule.*

1 . Calculer le travail des forces visqueuses à $v = 90km.h^{-1}$ et $v = 130km.h^{-1}$.

Le point Q_7 va de Moutiers ($alt.\,481\,m$) à Courchevel ($alt.\,1850\,m$).

2 . Quel est le travail de la force de pesanteur ? Et sur le trajet du retour ?

Dans les spécifications du véhicule, il est écrit qu'il atteint les $100\,km.h^{-1}$ en $9,1\,s$.

3 . En négligeant les frottements, quelle est la puissance moyenne délivrée par le moteur lors de ce $0-100$ *départ arrêté* (puissance mécanique transmise effectivement, nous ne traitons pas la question du rendement du moteur de l'ordre de $0,3$ au mieux). Comment cela se compare-t-il aux cas précédents ?

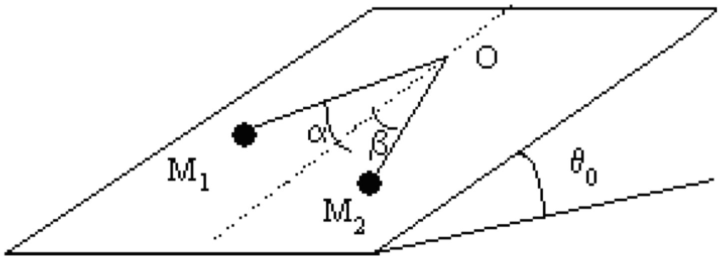
8.4 Mouvement d'un point matériel sur un cylindre

Une particule ponctuelle de masse m se déplace sans frottement sur la surface d'un cylindre de rayon a et d'axe horizontal. La particule est lancée avec une vitesse V_0 d'un point M_0 situé sur la génératrice supérieure et normalement à celle-ci. Déterminer la position de la particule lorsqu'elle quitte le cylindre.

TD 9 Aspect énergétiques (2)

9.1 Pendule sur un plan incliné

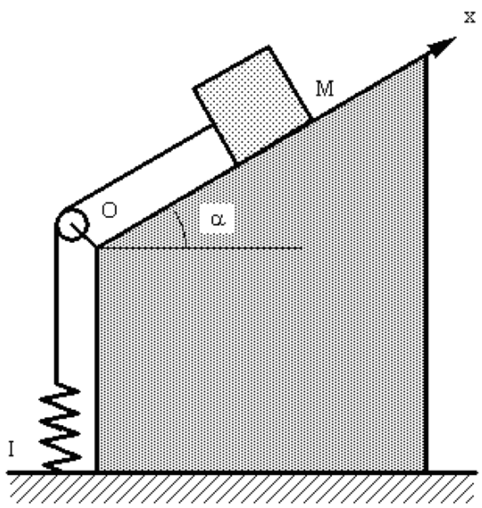
Un pendule de longueur ℓ et de masse m, fixé à son extrémité O, oscille en glissant avec frottements (coefficient μ_c) sur un plan incliné faisant l'angle θ_0 constant avec l'horizontale. On lâche le pendule en M_1 (OM_1 faisant l'angle α avec la ligne de plus grande pente) sans vitesse initiale, et la masse remonte en M_2 (OM_2 faisant l'angle β avec la ligne de plus grande pente).



Calculer le travail des forces non conservatives. En déduire une expression pour le coefficient de frottement cinétique μ_c entre le pendule et le plan incliné.

9.2 Système masse-ressort

La figure ci-dessous représente un corps ponctuel M de masse m qui peut glisser sur un plan $\overrightarrow{Ox}$ incliné d'un angle α, avec un coefficient de frottement cinétique μ_c. Un ressort de constante k relie M à un point I situé sur l'horizontale. A l'instant initial, le ressort est à sa longueur au repos, M est au point O, et une vitesse $\overrightarrow{v_0}$ suivant $\overrightarrow{Ox}$ lui est communiquée. On prendra : $m = 100$g, $\alpha = 30°$, $\mu_c = 1$, k correspondant à un allongement de 25cm pour une force de 10N, et $v_0 = 5m/s$. Déterminer la position maximale de M sur $\overrightarrow{Ox}$.



9.3 Mouvement dans un point matériel dans un potentiel cuvette

On considère le mouvement sans frottements d'un point matériel de masse m sur un axe horizontal $\overrightarrow{x\prime x}$ sous l'effet de deux forces extérieures dont la résultante s'écrit :

$$\overrightarrow{F}(x) = \left(-kx + \frac{a}{x^3}\right)\overrightarrow{e_x}$$

avec k et a des constantes positives et $\overrightarrow{e_x}$ le vecteur unitaire le long de l'axe $\overrightarrow{x\prime x}$.On se limitera à l'étude du mouvement dans le domaine des $x > 0$.

1. Déterminer la coordonnée x_0 de la position d'équilibre de la particule.
2. Etudier la fonction $F(x)$ en construisant son tableau de variation pour $x \in]0, +\infty[$. Représenter graphiquement cette fonction en précisant ses caractéristiques remarquables.
3. Calculer le potentiel $V(x)$ associé à la force globale $F(x)$, sachant que $V(x_0) = \sqrt{ka}$.

4. Etudier la fonction $V(x)$ pour $x \in]0, +\infty[$ et représenter graphiquement l'allure du potentiel en précisant les différentes caractéristiques de cette fonction.
5. On étudie le mouvement du point matériel au voisinage de sa position d'équilibre.

   (a) Ecrire l'expression de l'énergie mécanique E_m de la particule en un point quelconque. Que peut-on dire de cette énergie compte tenu des propriétés de la force $F(x)$?

   (b) Montrer que l'on doit avoir $E_m > \sqrt{ka}$ pour que le mouvement de la particule soit possible.

   (c) Montrer que le potentiel au voisinage de la position d'équilibre s'écrit :

   $$V(x) \simeq \sqrt{ka} + 2k\,(x - x_0)^2$$

   (d) En déduire le mouvement de la masse m autour de sa position d'équilibre.

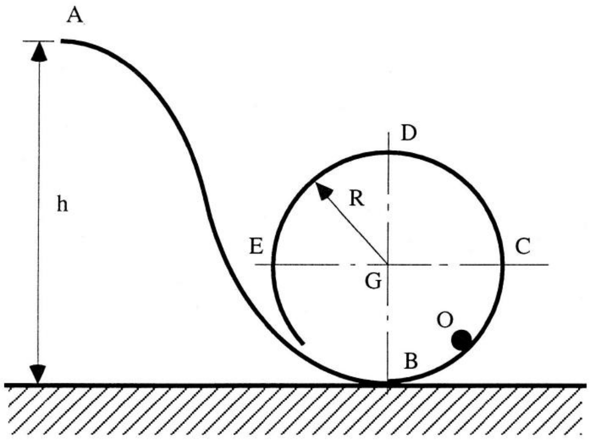
9.4 Vitesse de libération d'un vaisseau spatial

Nous proposons dans ce problème d'étudier le vol d'une navette spatiale de masse $m = 2.10^3$kg partant de la Terre. La Terre est ici supposée isolée et immobile dans le référentiel galiléen. Le vaisseau spatial est propulsé vers le haut avec une vitesse initiale, verticale et ascendante v_0. On néglige les frottements de l'air.

1. Rappeler l'expression de g avec l'altitude z, mesurée depuis la surface de la Terre. En déduire la relation entre g, g_0, z et le rayon terrestre R_T.
2. Ecrire l'énergie potentielle associée au poids du vaisseau en fonction de R_T, z, m et g_0.
3. Appliquer le théorème de conservation de l'énergie mécanique au système {vaisseau+Terre}. Etablir l'expression de la vitesse de la navette en fonction de z. On posera dans la formule obtenue : $v_e^2 = 2g_0R_T$. Pourquoi appelle-t-on v_e " vitesse de libération " du vaisseau spatial ?.

9.5 Looping

Un objet O de masse m, que l'on assimilera à un point matériel, glisse sans frottement sur un rail $ABCDE$, formant une boucle verticale $BCDE$ de rayon R. A l'instant initial, O est lâché, sans vitesse initiale, du point A d'altitude h au-dessus du sol.



1. Calculer les valeurs que prend la vitesse v de O par rapport au rail, lorsqu'il passe par les points B, C et D.
2. Calculer en ces mêmes points les réactions $\overrightarrow{R}_A$, $\overrightarrow{R}_B$, $\overrightarrow{R}_C$ exercées par le rail sur O.
3. Déterminer l'altitude minimale h_{min} de laquelle doit être lâché O pour qu'il fasse un tour complet de la boucle $BCDE$.
4. Si $h < h_{\text{min}}$, O quittera le rail entre les points B et D. Déterminer la position M occupée sur le rail par O, lorsque dans ces conditions, il quitte le rail. Ecrire l'équation du mouvement de O à partir de cet instant.

☺ Il manque une précision à la question 4. En fait si la hauteur h est trop faible (inférieure à une certaine valeur à déterminer), alors la masse m a un mouvement de balancier autour de B.

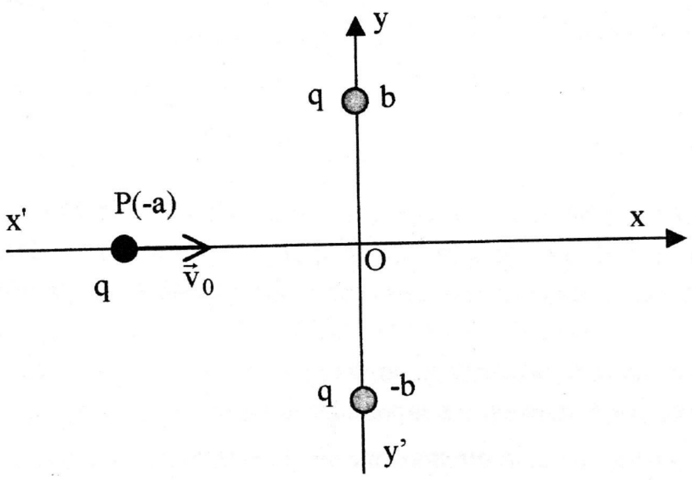
TD 10 Aspect énergétiques (3)

10.1 Barrière et puits de potentiel

1. Rappeler l'expression vectorielle générale de la force électrostatique existant entre deux particules chargées quelconques q_1 et q_2 séparées d'une distance r. Faire un schéma clair en indiquant le vecteur unitaire utilisé.
2. Calculer le potentiel associé à cette force $V(r)$, en précisant l'origine des potentiels choisie. Représenter sur un même graphe l'allure de $V(r)$ dans le cas de charges de mêmes signes, et dans le cas de charges de signes contraires.

   Application

   On considère une particule P, de masse m et de charge q positive, lancée suivant un axe $\overrightarrow{Ox}$ horizontal avec une vitesse v_0 à partir du point d'abscisse $-a$ ($a > 0$ et supposé très grand). Celle-ci est progressivement soumise à l'action de deux autres charges ponctuelles identiques, de charge q, situées sur l'axe $\overrightarrow{Oy}$ aux ordonnées $+b$ et $-b$. Ces charges restent immobiles à chaque instant, tandis que P est astreint, par un système de guidage électromagnétique, à se déplacer uniquement sur l'axe $\overrightarrow{Ox}$. Aucun frottement ne s'exerce sur P au cours de son mouvement.



3. Calculer l'énergie potentielle totale à un instant donné de la particule mobile P le long de l'axe $\overrightarrow{Ox}$, en fonction de son abscisse x et des données du problème. En déduire une expression de l'énergie mécanique de P. Comment évolue cette énergie au cours du temps ?
4. Représenter schématiquement l'évolution de l'énergie potentielle et de l'énergie mécanique en fonction de x. Montrer que pour passer dans les valeurs positives de x, la particule P doit franchir une barrière de potentiel. Calculer la vitesse minimale initiale v_{0min} qu'il faut donner à la particule pour que cela soit possible.
5. On lance à présent une particule P de charge $-q$ ($q > 0$) de manière analogue à l'expérience précédente.

   (a) En raisonnant sur un diagramme d'énergie potentielle, montrer que l'on obtient une cuvette de potentiel qui tend à piéger P autour d'une position que l'on précisera.

   (b) Calculer la vitesse de libération v'_{0min} de P, c'est-à-dire la vitesse initiale minimale permettant à P de sortir du puits de potentiel.

   (c) Existe-t-il une position d'équilibre stable ? Si on autorisait un déplacement vertical de la particule, cet équilibre resterait-il stable ?

TD 11 Oscillations libres (1)

11.1 Oscillations d'un cube flottant dans un liquide

D'après le principe d'Archimèdes, tout corps partiellement ou entièrement plongé dans un fluide subit une force verticale, vers le haut, d'intensité égale au poids du volume d'eau déplacé.

a) Un cube de masse m et de côté b flotte sans pencher dans un fluide de masse volumique ρ. Quelle est la hauteur immergée h_0 du cube ?

b) Quelle est la force totale exercée sur ce cube quand il est immergé d'une hauteur h ?

c) Quelle est la période d'oscillations du cube quand il oscille de haut en bas ?

11.2 Membrane de haut-parleur

La partie mécanique d'un haut parleur est constituée d'une membrane mobile, en forme de cône, solidaire d'un mandrin cylindrique sur lequel est enroulé le fil du bobinage. L'ensemble est maintenu en place par des suspensions élastiques qui jouent le rôle de guidage (le mouvement est limité à une translation de l'équipage mobile) . La partie mobile peut être représentée par une masse m, assimilable à un point matériel, mobile sans frottement sur une tige horizontale Ox. Elle est rappelée vers sa position d'équilibre (le point O) par un ressort de masse négligeable, de raideur k, pouvant travailler en extension comme en compression. On repère le point M par son abscisse x.

1. En l'absence d'amortissement
   (a) On écarte M de sa position d'équilibre et on le lâche sans vitesse à l'instant t = 0, à l'abscisse x_0. Ecrire l'équation différentielle du mouvement de M.
   (b) En déduire la pulsation propre et la période T_0 du mouvement. Calculer la période et la fréquence si m = 8 g et k = 1536 Nm^{-1}
2. L'action de l'air ambiant sur la membrane se résume à une force colinéaire à la vitesse et de sens contraire , le coefficient de proportionnalité f étant positif :
   $$\vec{F} = -f.\vec{v}$$
   (a) Ecrire la nouvelle équation différentielle du mouvement
   (b) Le système fonctionne en régime critique, déterminer en fonction de k et m la valeur f_c de f. Calculer f_c.
   (c) Ecrire l'équation différentielle en fonction de ω_0 et $\alpha = f/f_c$.
   (d) La masse m étant abandonnée sans vitesse en x_0 à l'instant $t = 0$, donner l'allure des graphes $x = f(t)$ lorsque α est supérieur, inférieur ou égal à 1.
   (e) Dans le cas où α est inférieur à 1, déterminer l'expression de la pseudo période T en fonction de T_0 et α. Calculer T pour α = 0,1.
   (f) Lorsque α est nettement inférieur à 1, on peut considérer que le mouvement est sinusoïdal de période T_0 :
   $$x = a.\cos(\omega_0 t + \varphi)$$
   exprimer l'énergie E de cet oscillateur en fonction de k et a puis en fonction de m, ω_0 et a.
   (g) Calculer la valeur W du travail de la force de frottement mis en jeu au cours d'une période en fonction de m, a, ω_0 et α.

TD 12 Oscillations libres (2)

12.1 Oscillation d'une masse maintenue par deux ressorts

Un point matériel M de masse m= 10g est relié à deux ressorts identiques, de raideur k = 15 N.m^{-1} , de longueur à vide $l_0 = 30$ cm , de masse négligeable, placés verticalement. Les extrémités A et A' des ressorts sont fixées à des points fixes et distants de $2a$, avec $a > l_0$. A l'équilibre on désignera par l_1 la longueur du ressort AB et par l_2 celle du ressort A'B.

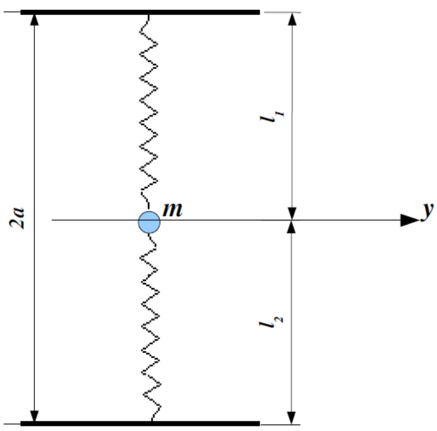


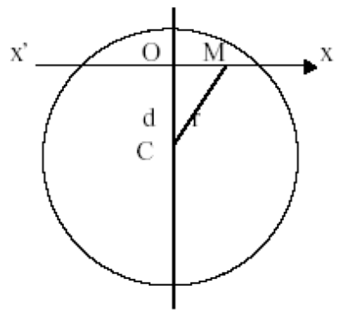
FIG. 7 – système maintenu par deux ressorts

1. A l'équilibre, calculer les longueurs l_1 et l_2 des ressorts en fonction de m , g , a et k . Que peut-on dire si l'on suppose le poids mg très petit devant $2ak$?

2. Un dispositif convenable assure le guidage de la masse m suivant l'axe horizontal y'y . Tous les frottements seront négligés et on suppose que l'on peut faire l'approximation $l_1 = l_2 = a$. On déplace horizontalement la masse m de y_0 à partir de sa position d'équilibre et on lâche le système sans vitesse initiale. Etablir l'équation différentielle du mouvement. Dans le cas où $y_0 << a$, simplifier cette dernière et en déduire l'expression de la période T du mouvement.

12.2 Oscillation d'un point matériel dans un tunnel

On démontre que pour tout point matériel M , de masse m , situé à l'intérieur de la Terre supposée à symétrie sphérique de masse, à la distance r du centre C de la Terre, l'attraction terrestre est une force agissant sur ce point, dirigée vers le centre de la Terre et de valeur $\vec{F} = -mg_0\frac{\vec{r}}{R}$ où R est le rayon de la Terre. On négligera les effets des forces d'inertie associées à la rotation de la Terre.



1. Quelle est l'énergie potentielle de pesanteur de la masse m à la distance r de C , en posant cette énergie nulle en C ?

2. On considère un tunnel rectiligne ne passant pas par C et traversant la Terre : la distance du tunnel au centre de la Terre est $d = OC$. La masse m s'y meut sans frottement. Déterminer la nature du mouvement de cette masse dans le tunnel, si elle est abandonnée sans vitesse initiale à la surface de la Terre.

3. Calculer la vitesse maximum de M . On donne $g_0 = 10\,\mathrm{m.s^{-2}}$; $R = 6,4.10^6$ m ; $d = 5.10^6$ m .

Données physiques générales

Constantes universelles

Quantité	Symbole	Valeur
Vitesse de la lumière dans le vide	c	$2.99792458 \times 10^{8}\mathrm{ms}^{-1}$
Perméabilité magnétique du vide	μ_0	$4\pi.10^{-7} = 1.25664 \times 10^{-6}\mathrm{H.m}^{-1}$
Permittivité électrique du vide	ϵ_0	$8.854187817 \times 10^{-12}\mathrm{Fm}^{-1}$
Constante de gravitation	G	$6.67259 \times 10^{-11}\mathrm{m}^{3}\mathrm{kg}^{-1}\mathrm{s}^{-2}$
Constante de Planck	h	$6.6260755 \times 10^{-34}\mathrm{Js}$

Données atomiques et électroniques

Quantité	Symbole	Valeur
Charge électronique	e	$1.60217733 \times 10^{-19}\mathrm{C}$
Masse de l'électron	m_e	$9.1093897 \times 10^{-31}\mathrm{kg}$
Masse du proton	m_p	$1.6726231 \times 10^{-27}\mathrm{kg}$
Rapport des masses électron-proton	m_e/m_p	$5.44617013 \times 10^{-4}$
Masse du neutron	m_n	$1.6749286 \times 10^{-27}\mathrm{kg}$
Rapport des masses neutron-électron	m_n/m_e	1838.683662
Rapport des masses neutron-proton	m_n/m_p	1.001378404

Le système solaire

Système soleil-terre-lune

Rayon de la terre $R_\oplus$	$6.376.10^{6}\mathrm{m}$
Rayon du soleil R_S	$109.2R_\oplus$
Rayon de la lune R_L	$0.27.R_\oplus$
Masse de la terre $M_\oplus$	$5.98.10^{24}\mathrm{kg}$
Masse du soleil M_S	$322.10^{3}M_\oplus$
Masse de la lune M_L	$\frac{1}{81}M_\oplus$
Période de révolution propre du soleil	25.37 jours
Période de révolution propre de la terre	0.997 jour
Période de révolution propre de la lune	27.32 jours
Période de révolution de la terre autour du soleil	365.26 jours
Période de révolution de la lune autour de la terre	27.32 jours
Distance terre-lune	$60.3R_\oplus$
Distance terre-soleil $D_\oplus$	$1.5.10^{11}\mathrm{m}$