Fomesoutra.com
ça soutra!

RÉPUBLIQUE DE CÔTE D'IVOIRE
UNION - DISCIPLINE - TRAVAIL

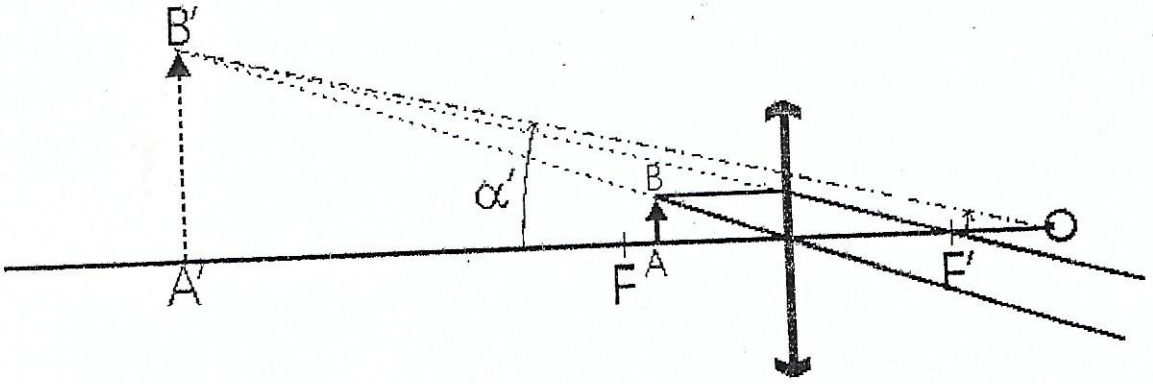
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE DE COCODY

UNITE DE FORMATION ET DE RECHERCHE
SCIENCES DES STRUCTURES DE LA MATIERE
ET DE TECHNOLOGIE

COURS D'OPTIQUE

PC1 – MPCT1 – MPT1 – MI1



DOCTEUR DIAWARA ADAMA
Maître Assistant à l'Université de Cocody
Laboratoire de Physique de l'Atmosphère
et de Mécanique des Fluides (LAPA-MF)

AVANT PROPOS

Branche de la physique consacrée à l'étude des phénomènes lumineux, l'optique a toujours joué un grand rôle dans le développement de la connaissance scientifique. L'astronomie, la théorie des quanta et la relativité sont nées de l'optique.

L'optique connaît aujourd'hui un essor extraordinaire grâce à l'avènement du laser : les produits connus du grand public tels que les lecteurs de disques compacts, les caméscopes et les télécommunications par fibres optiques, sont des applications de l'optique.

Cette largeur du champ d'application de l'optique oblige les physiciens d'autres branches et même certains non physiciens à avoir un minimum de connaissance en optique.

Le présent ouvrage a pour objectif d'expliquer les éléments de base de l'optique géométrique. Ainsi cet ouvrage permettra aux étudiants de 1ère année de vaincre la peur qui s'empare d'eux dès qu'on parle d'optique. En outre, cet ouvrage constitue un outil de travail pour les enseignants d'optique.

Je remercie vivement le Professeur Ebby, Directeur du Laboratoire de Cristallographie et de Physique Moléculaire de l'Université de Cocody, qui m'a confié la responsabilité des cours d'optique de 1ère année, ainsi que le Docteur Kédro, qui a mis à ma disposition de nombreux documents d'optique.
Mes remerciements vont également aux collègues qui m'ont encouragé à réaliser cet ouvrage, notamment le Docteur Sako.

Je remercie d'avance les collègues enseignants et les étudiants, pour leurs critiques, corrections et suggestions, gages d'amélioration de la qualité de cet ouvrage.

Dr Diawara Adama

Première édition

Août 2007

TABLE DES MATIERES

Avant propos.....P 01

Table des matières.....P 02

Chapitre 1 : Les théories de la lumière.....P 03

Chapitre 2 : Généralités sur les ondes – Cas des ondes lumineuses.....P 06

Chapitre 3 : Lois fondamentales de l'optique géométrique.....P 15

Chapitre 4 : Principe de Fermat – Stigmatisme.....P 21

Chapitre 5 : Miroir plan – Dioptre plan – Lame à faces parallèles – Prisme.....P 28

Chapitre 6 : Miroir et dioptre sphériques.....P 44

Chapitre 7 : Systèmes centrés dioptriques.....P 64

Chapitre 8 : Les lentilles minces.....P 76

Chapitre 9 : L'œil et les instruments d'optique.....P 86

Chapitre10 : Optique géométrique et calcul matriciel.....P 96

CHAPITRE 1 : LES THEORIES DE LA LUMIERE

I – Introduction

L'optique est l'étude des phénomènes lumineux. Parler d'optique amène donc à dire ce qu'est la lumière : la lumière est le rayonnement émis par des corps portés à haute température (incandescence) ou par des corps excités (luminescence) et qui est perçu par les yeux.

Actuellement deux théories complémentaires de la lumière coexistent :

- l'une présente la lumière comme une onde électromagnétique qui se propage à la vitesse $c = 3.10^8$ m.s^{-1} dans le vide et $v = c / n$ dans un milieu d'indice n.
  C'est la théorie ondulatoire.
- l'autre considère que la lumière est constituée de grains d'énergie qui se propagent à la vitesse c dans le vide. Ces grains, appelés photons, sont des particules sans masse au repos.
  C'est la théorie corpusculaire.

II – La théorie ondulatoire

Suggérée par Huygens au 17^e siècle, la théorie ondulatoire est confirmée au début du 19^e siècle par les travaux de Young et Fresnel (interférences lumineuses, polarisation de la lumière, diffraction, etc.).
Comme prévu par Maxwell dans la deuxième moitié du 19^e siècle, la théorie ondulatoire montre que :

- la lumière fait partie de la grande famille des ondes électromagnétiques ;
- le phénomène lumineux est dû aux variations périodiques d'un champ électrique et d'un champ magnétique.

III – La théorie corpusculaire

Développée au 20^e siècle, la théorie corpusculaire permettra d'expliquer les phénomènes optiques tels que l'émission de la lumière par les corps portés à haute température, que la théorie ondulatoire ne parvenait pas à expliquer. En effet, en 1900, Max Planck fait l'hypothèse selon laquelle un corps chauffé n'émet pas de l'énergie lumineuse de façon continue mais par petits paquets appelés quanta d'énergie. En 1905, Einstein poussa l'idée plus loin en postulant que ces quanta d'énergie sont portés par des particules sans masse au repos qu'il appela photons. Chaque photon transporte une énergie $\varepsilon = h.\nu$ proportionnelle à la fréquence ν de la radiation (h est une constante universelle, dite constante de Planck : $h = 6{,}63.10^{-34}$ J.s).

La mécanique ondulatoire proposée par Louis de Broglie en 1924, réussit à concilier les deux théories de la lumière : les particules matérielles présentent un caractère ondulatoire ; en d'autres termes, à toute onde on peut associer un corpuscule.

IV – Les diverses disciplines de l'optique

1. L'optique géométrique : elle est basée sur le principe de propagation rectiligne de la lumière, donc sur la notion de rayon lumineux.

2. L'optique ondulatoire ou optique physique : elle s'intéresse aux phénomènes liés à la nature ondulatoire de la lumière.

3. L'optique quantique : elle étudie l'aspect corpusculaire de la lumière dans ses échanges d'énergie avec la matière.

4. L'optique instrumentale : elle s'occupe de la conception et de la construction des instruments d'optique.

5. L'optique physiologique : elle traite de la formation des images dans l'œil et de la façon dont celui-ci les perçoit.

6. Etc.

V – L'optique géométrique

Ce cours sera essentiellement consacré à l'optique géométrique. Cette dernière est la limite vers laquelle tend l'optique ondulatoire lorsque la longueur d'onde de la lumière devient petite devant les dimensions des ouvertures traversées par la lumière. Ainsi, pour mieux comprendre l'optique géométrique, nous aborderons d'abord (dès le chapitre suivant) l'aspect ondulatoire de la lumière.

VI – Exercice d'application

6-1 Enoncé

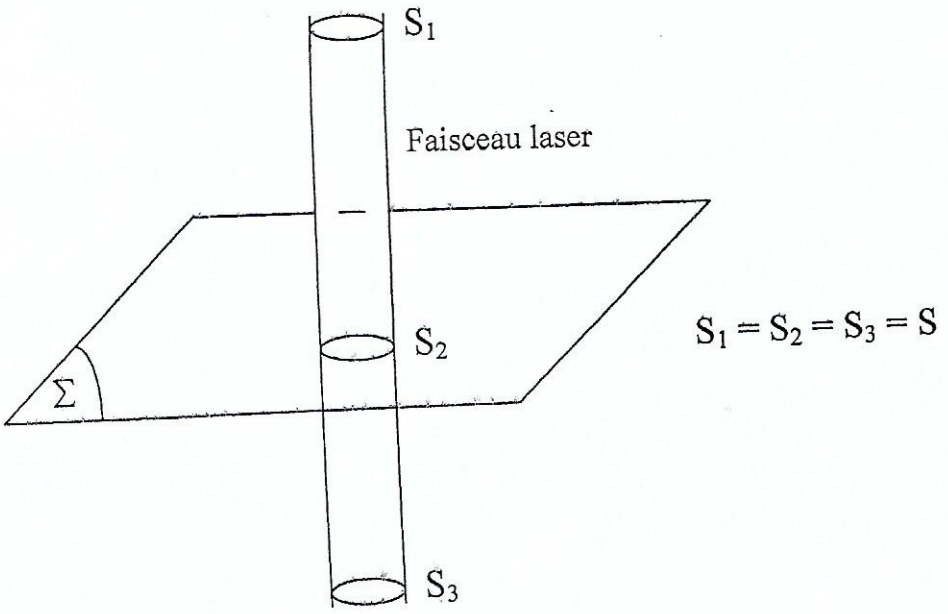
Un faisceau laser de puissance 1,0 mW et de fréquence $4{,}74.10^{14}$ Hz, a une section égale à $3{,}14.10^{-6}$ m^2. Déterminer :

a) Le flux de photons, c'est-à-dire le nombre moyen de photons tombant, par seconde, sur une surface plane perpendiculaire au faisceau.
b) La densité de flux de photons, c'est-à-dire le nombre moyen de photons tombant, par seconde, sur une surface unité (d'aire 1 m^2) plane et perpendiculaire au faisceau.

6-2 Solution

$P = 1$ mW $= 10^{-3}$ W ; $\nu = 4{,}74.10^{14}$ Hz ; $S = 3{,}14.10^{-6}$ m^2.

a)



Soit E l'énergie totale transportée par les N photons traversant la section S_2 (donc la surface Σ) pendant une durée t.

$$P = \frac{E}{t} = \frac{N.\varepsilon}{t}$$

où ε est l'énergie transportée par un photon.

Le flux de photons :

$$\phi = \frac{N}{t} = \frac{P}{\varepsilon} = \frac{P}{h\nu}$$

A.N. : $\phi = \dfrac{10^{-3}}{6{,}63.10^{-34} \, x \, 4{,}74.10^{14}}$

$$\phi = 3{,}18.10^{15} \text{ photons.s}^{-1}$$

b) La densité de flux :

$$\varphi = \frac{\phi}{S_2} = \frac{\phi}{S}$$

A.N. : $\varphi = \dfrac{3{,}18.10^{15}}{3{,}14.10^{-6}}$

$$\varphi = 1{,}01.10^{21} \text{ photons.s}^{-1}.\text{m}^{-2}$$

CHAPITRE 2 : GENERALITES SUR LES ONDES CAS DES ONDES LUMINEUSES

Comme nous l'avons souligné au chapitre 1, les ondes lumineuses sont de nature électromagnétique. Dans ce chapitre 2, nous exposerons quelques généralités sur les ondes, puis nous aborderons le cas particulier des ondes lumineuses.

I – Généralités sur les ondes

1-1 Définition de l'onde

On appelle onde une modification locale d'un milieu élastique, cette modification (ou perturbation) se propageant dans une direction donnée.
Exemple d'onde : une pierre tombant dans l'eau, donne naissance à des rides, qui se propagent à la surface de l'eau.

1-2 Différentes sortes d'onde

La propagation d'une onde dans un milieu se traduit par la variation d'une grandeur physique avec le temps et l'espace. Cette grandeur physique peut être de nature scalaire et l'onde est alors scalaire (cas de l'onde sonore), ou de nature vectorielle et l'onde est alors vectorielle (cas de l'onde électromagnétique).

Lorsque la perturbation s'exerce dans la direction de propagation de l'onde, celle-ci est dite longitudinale (cas de l'onde sonore). Lorsque la perturbation s'exerce dans la direction perpendiculaire à la direction de propagation de l'onde, celle-ci est dite transversale (cas d'une onde à la surface d'un liquide).

1-3 Equation d'onde

On appelle équation d'onde l'équation différentielle qui permet de déterminer soit la fonction scalaire $S(M,t)$, caractéristique de l'onde scalaire, soit l'une des composantes de la fonction vectorielle caractéristique de l'onde vectorielle. La fonction solution de l'équation d'onde s'appelle la fonction d'onde.

On montre que l'équation d'onde (ou équation de d'Alembert) s'écrit :

$$\Delta S - \frac{1}{V^2}\frac{\partial^2 S}{\partial t^2} = 0 \qquad (1)$$

où :

- S est la fonction scalaire caractéristique de l'onde scalaire (s'il s'agit d'une onde scalaire) ou l'une des composantes de la fonction vectorielle caractéristique de l'onde vectorielle (s'il s'agit d'une onde vectorielle) ;
- V est la vitesse de propagation (ou la célérité) de l'onde dans le milieu considéré ;
- ΔS est le laplacien de la fonction d'onde S : $\Delta S = \nabla^2 S$.

Le calcul de ΔS dépend du système de coordonnées considéré. Dans le système cartésien Oxyz, on a :

$$\Delta S = \nabla^2 S = \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial z^2} \qquad (2)$$

1-4 Surfaces d'onde

On appelle surface d'onde ou front d'onde, l'ensemble des points du milieu de propagation que l'onde atteint au même instant. En d'autres termes, la surface d'onde à l'instant t, Σ_t, est l'ensemble des points pour lesquels la fonction caractéristique de l'onde, S, a la même valeur à la date t choisie.

Lorsque les surfaces d'onde sont des plans (appelés plans d'onde), l'onde est dite plane. Lorsqu'elles sont des sphères (centrées en un même point), l'onde est dite sphérique.
Au fur et à mesure que l'on s'éloigne du point source, le rayon de courbure des surfaces d'onde sphériques augmente, donc leur courbure diminue. Lorsque le point source est à l'infini, ladite courbure s'annule ; les surfaces d'onde deviennent des plans, et l'onde est alors plane. C'est pourquoi dans ce cours, nous nous limiterons aux ondes planes.

1-5 Forme des solutions de l'équation d'onde dans le cas d'une onde plane

Considérons une onde plane dont la direction de propagation (Δ) a pour vecteur unitaire $\vec{u}$.
On démontre que la solution de l'équation d'onde (1) est de la forme :

$$S(r,t) = f(\vec{u}.\vec{r} - Vt) + g(\vec{u}.\vec{r} + Vt) \qquad (3)$$

où : f et g sont deux fonctions a priori arbitraires ; $\vec{r}$ est le vecteur position $\overrightarrow{OM}$.
La fonction $f(\vec{u}.\vec{r} - Vt)$ représente une perturbation qui se propage dans la direction positive (croissante) de $\vec{u}.\vec{r}$ avec la vitesse V. De même $g(\vec{u}.\vec{r} + Vt)$ représente une perturbation qui se propage dans la direction négative (décroissante) de $\vec{u}.\vec{r}$ avec la vitesse V. Ces deux solutions constituent donc chacune une onde progressive.
Chacune de ces deux solutions représente une onde plane, car, à chaque instant t, $f(\vec{u}.\vec{r} - Vt)$ et $g(\vec{u}.\vec{r} + Vt)$ restent constants sur le plan d'équation $\vec{u}.\vec{r}$ = cte, plan perpendiculaire au vecteur unitaire $\vec{u}$, donc à la direction de propagation de l'onde.
Les conditions expérimentales peuvent être telles que seule l'une des deux solutions existe.

Cas particulier d'une onde plane progressive sinusoïdale (et monochromatique) :

Dans ce cas, parmi les solutions possibles du type $f(\vec{u}.\vec{r} - Vt)$, la plus simple est la suivante :

$$S(r,t) = S_0 Cos\left[\omega(t-\frac{\vec{u}.\vec{r}}{V})+\varphi\right] \qquad (4)$$

où : S_0 et ω sont respectivement l'amplitude et la pulsation de l'onde ; φ est une composante de la phase Φ de l'onde :

$$\Phi = \left[\omega(t-\frac{\vec{u}.\vec{r}}{V})+\varphi\right] \qquad (5).$$

Dans le cas où $\varphi = 0$, on a :

$$S(r,t) = S_0 Cos(\omega t - \frac{\omega}{V}\vec{u}.\vec{r}) \qquad (6).$$

Or :

$$\frac{\omega}{V}\vec{u} = \frac{2\pi}{VT}\vec{u} = \frac{2\pi}{\lambda}\vec{u} = \vec{k} \qquad (7)$$

T et λ sont respectivement la période et la longueur d'onde de l'onde.
$\vec{k}$ est le vecteur d'onde.

La fonction d'onde (6) s'écrit alors :

$$S(r,t) = S_0 Cos(\omega t - \vec{k}.\vec{r}) \qquad (8)$$

C'est cette forme de $S(r,t)$ que l'on adopte le plus généralement.
La notation complexe de la fonction d'onde (8) est la suivante :

$$S(r,t) = S_0\, e^{i(\omega t - \vec{k}.\vec{r})} \qquad (9)$$

où : $i^2 = -1$.

II – Les ondes lumineuses

Comme souligné plus haut, les ondes lumineuses appartiennent au domaine des ondes électromagnétiques. Ainsi, à la propagation d'une onde plane, on associe la notion de faisceau parallèle de rayons lumineux ; de même, à la propagation d'une onde sphérique divergente (respectivement convergente), on associe la notion de rayons lumineux divergents (respectivement convergents).

2-1 Origine des ondes électromagnétiques – Equations de Maxwell

Considérons, dans une région donnée de l'espace, une distribution de charge et de courant définie par le couple (ρ, $\vec{J}$), où ρ(M,t) est la densité volumique de charge et $\vec{J}$ (M,t) le vecteur densité de courant, au point M, à l'instant t. Cette distribution donne naissance à une onde électromagnétique, c'est-à-dire à la propagation simultanée d'un champ électrique $\vec{E}$ et d'un champ magnétique $\vec{B}$, qui obéissent aux 4 équations de Maxwell :

$$div\,\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad (10)$$

$$div\,\vec{B} = 0 \qquad (11)$$

$$\overrightarrow{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad (12)$$

$$\overrightarrow{rot}\,\vec{B} = \mu_0\left(\vec{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) \qquad (13)$$

avec : ε_0 = permittivité diélectrique du vide = $\frac{1}{36\pi.10^9}$

μ_0 = perméabilité magnétique du vide = $4\pi.10^{-7}$

Dans le vide (dépourvu de charges et de courants : $\rho = 0$, $J = 0$), les équations de Maxwell deviennent :

$$div\,\vec{E} = 0 \qquad (10')$$

$$div\,\vec{B} = 0 \qquad (11')$$

$$\overrightarrow{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad (12')$$

$$\overrightarrow{rot}\,\vec{B} = \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \qquad (13')$$

2-2 Champs électrique et magnétique d'une onde électromagnétique plane progressive sinusoïdale (et monochromatique)

Les vecteurs champs électrique $\vec{E}$ et magnétique $\vec{B}$, caractéristiques de l'onde électromagnétique, obéissent à l'équation d'onde (1).
Dans le cas où l'onde électromagnétique (à laquelle nous assimilons l'onde lumineuse étudiée) est plane progressive sinusoïdale (et monochromatique), $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont donnés par les relations suivantes (voir équation 8) :

$$\vec{E}(\vec{r},t)=\vec{E_0}Cos(\omega t-\vec{k}.\vec{r}+\varphi) \qquad (14)$$

$$\vec{B}(\vec{r},t)=\vec{B_0}Cos(\omega t-\vec{k}.\vec{r}+\phi) \qquad (15)$$

Soit, en notation complexe :

$$\vec{E}(\vec{r},t)=\vec{E_0}\,.\,e^{i(\omega t-\vec{k}.\vec{r}+\varphi)} \qquad (14')$$

$$\vec{B}(\vec{r},t)=\vec{B_0}\,.\,e^{i(\omega t-\vec{k}.\vec{r}+\phi)} \qquad (15')$$

$\vec{E_0}$ et $\vec{B_0}$ sont les amplitudes de $\vec{E}$ et $\vec{B}$ respectivement.

Remarque :

A/ $\vec{E}=\vec{E}_0e^{i(\omega t-k_xx-k_yy-k_zz+\varphi)}=\alpha\vec{E}_0$ où $\alpha=e^{i(\omega t-k_xx-k_yy-k_zz+\varphi)}$

L'onde étant plane, $\vec{E}$ ne dépend que d'une seule coordonnée ; il en est de même pour $\vec{B}$.
Donc deux des composantes (k_x, k_y, k_z) de $\vec{k}$ sont nulles.

$$r\vec{o}t\vec{E}=\vec{\nabla}\Lambda\vec{E}=\vec{\nabla}\Lambda(\alpha\vec{E}_0)=(\vec{\nabla}\alpha)\Lambda\vec{E}_0+\alpha(\vec{\nabla}\Lambda\vec{E}_0)$$

$$\vec{\nabla}\Lambda\vec{E}_0=(\frac{\partial E_{oz}}{\partial y}-\frac{\partial E_{oy}}{\partial z})\vec{e}_x-(\frac{\partial E_{oz}}{\partial x}-\frac{\partial E_{ox}}{\partial z})\vec{e}_y+(\frac{\partial E_{oy}}{\partial x}-\frac{\partial E_{ox}}{\partial y})\vec{e}_z=\vec{0}$$, car $\vec{E}_0$ étant une constante vectorielle, E_{ox}, E_{oy} et E_{oz} sont des constantes réelles.

$$\vec{\nabla}\alpha=gr\vec{a}d\alpha=(\frac{\partial\alpha}{\partial x})\vec{e}_x+(\frac{\partial\alpha}{\partial y})\vec{e}_y+(\frac{\partial\alpha}{\partial z})\vec{e}_z$$

$$\frac{\partial\alpha}{\partial x}=-ik_x.\alpha\ ,\quad \frac{\partial\alpha}{\partial y}=-ik_y.\alpha\ ,\quad \frac{\partial\alpha}{\partial z}=-ik_z.\alpha$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla}\alpha = -i.\alpha(k_x\vec{e}_x + k_y\vec{e}_y + k_z\vec{e}_z) = -i\alpha\vec{k}$$

Donc on a :

$$r\vec{o}t\vec{E} = -i\alpha\vec{k}\Lambda\vec{E}_0 = -i\vec{k}\Lambda\alpha\vec{E}_0$$

$$\boxed{r\vec{o}t\vec{E} = -i\vec{k}\Lambda\vec{E}} \qquad (16)$$

B/

$$\vec{B} = \vec{B}_0 e^{i(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z + \phi)} \quad \text{où } \vec{B}_0 = c\vec{t}e$$

$$\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = \vec{B}_0.i\omega e^{i(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z + \phi)}$$

$$\boxed{\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = i\omega\vec{B}} \qquad (17)$$

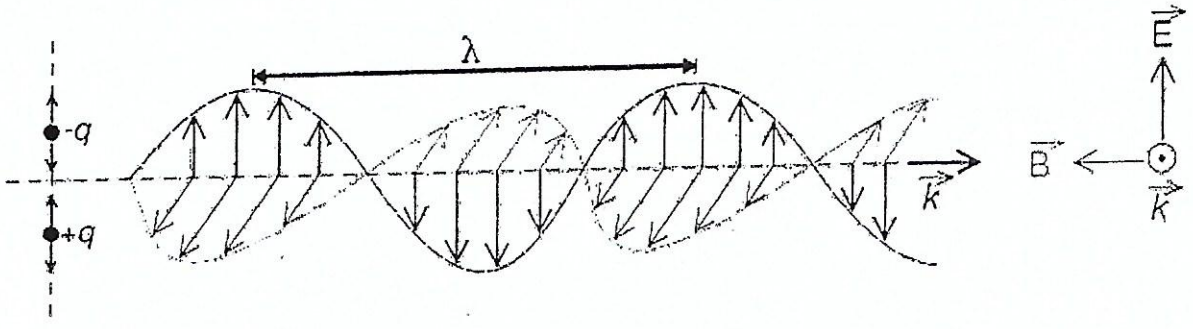
C/ D'après la 3^e équation de Maxwell (12) :

$$r\vec{o}t\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

$$-i\vec{k}\Lambda\vec{E} = -i\omega\vec{B}$$

$$\Longrightarrow \qquad \boxed{\vec{B} = \frac{\vec{k}}{\omega}\Lambda\vec{E}} \qquad (18)$$

Donc $(\vec{k}, \vec{E}, \vec{B})$ est un trièdre rectangle direct.



Les champs électrique $\vec{E}$ et magnétique $\vec{B}$ oscillent en phase.

2-3 Polarisation de la lumière

Si au cours de la propagation de l'onde électromagnétique, les vecteurs $\vec{E}$ et $\vec{B}$, tout en restant perpendiculaires entre eux, prennent des orientations aléatoires dans le plan d'onde $(\vec{E}, \vec{B})$, la lumière est dite naturelle. C'est le cas de la lumière blanche émise par des sources telles que le soleil et les lampes à incandescence.

Lorsque $\vec{E}$ et $\vec{B}$ gardent des directions fixes au cours de la propagation, on dit que l'onde lumineuse est polarisée rectilignement (ou linéairement). Ainsi, une onde est polarisée rectilignement suivant la direction (Ox) si le champ $\vec{E}$ est parallèle à (Ox) : $\vec{E} = E_x \vec{e_x}$.

2-4 Energie et intensité lumineuse

L'étude de la propagation des ondes électromagnétiques permet de définir le vecteur de Poynting :

$$\boxed{\vec{R} = \vec{E} \Lambda \frac{\vec{B}}{\mu_0}} \qquad (19)$$

$$(18) \Rightarrow \vec{R} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \Lambda (\frac{\vec{k}}{\omega} \Lambda \vec{E}) = \frac{1}{\mu_0 \omega} \left[(\vec{E}.\vec{E}) \vec{k} - (\vec{E}.\vec{k}.) \vec{E} \right]$$

Or $\vec{E}.\vec{k} = 0$, car $\vec{E} \perp \vec{k}$

$$\Rightarrow \vec{R} = \frac{E^2}{\mu_0 \omega} \vec{k} = \frac{E^2}{\mu_0 \omega} \frac{\omega}{V} \vec{u} \quad (\text{d'après (7)})$$

$$\boxed{\vec{R} = \frac{E^2}{\mu_0 V} \vec{u}} \qquad (20)$$

Si l'on considère une onde électromagnétique plane progressive sinusoïdale monochromatique se propageant dans le vide, on a :

$$\boxed{\vec{R} = \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \cos^2(\omega t - \vec{k}.\vec{r}) \vec{u}} \qquad (21)$$

La direction du vecteur de Poynting $\vec{R}$ est celle de la propagation de l'énergie. Les rayons lumineux sont des droites parallèles à $\vec{R}$.

Le flux du vecteur $\vec{R}$ à travers une surface dS de vecteur normal $\vec{n}$ est la puissance énergétique ou flux énergétique traversant dS :

$$dP = d\Phi = \vec{R}.\vec{n}\,dS$$

Un écran d'aire dS placé normalement aux rayons d'un faisceau parallèle reçoit une puissance:

$$dP = RdS = \frac{E_0^2}{\mu_0 c}\cos^2(\omega t - \vec{k}.\vec{r})dS$$

Seule la valeur moyenne (au cours du temps) de dP est perceptible.
La puissance énergétique moyenne (temporelle) qui traverse une surface d'aire unité normale à la direction de propagation, appelée l'intensité I de l'onde (ou l'éclairement ξ de l'écran), est donc :

$$I = \xi = \left\langle \frac{dP}{dS} \right\rangle = \frac{E_0^2}{\mu_0 c}\left\langle \cos^2(\omega t - \vec{k}.\vec{r}) \right\rangle$$

Or $\left\langle \cos^2(\omega t - \vec{k}.\vec{r}) \right\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T \cos^2(\omega t - \varphi)dt$, où $\varphi = \vec{k}.\vec{r} = cte$ par rapport à t.

$$\Rightarrow \left\langle \cos^2(\omega t - \vec{k}.\vec{r}) \right\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{1+\cos[2(\omega t - \varphi)]}{2}dt$$

$$= \frac{1}{2T}\left[t + \frac{1}{2\omega}\sin(2\omega t - 2\varphi) \right]_0^T$$

$$= \frac{1}{2T}\left[T + \frac{1}{2\omega}\sin(4\pi - 2\varphi) - \frac{1}{2\omega}\sin(-2\varphi) \right]$$

$$= \frac{1}{2T}\left[T - \frac{1}{2\omega}\sin 2\varphi + \frac{1}{2\omega}\sin 2\varphi \right]$$

$$= \frac{1}{2}$$

Donc on a :

$$\boxed{I = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c}} \qquad (22)$$

$$\mu_0 \varepsilon_0 c^2 = 4\pi.10^{-7}.\frac{1}{36\pi.10^9}(3.10^8)^2 = 1$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{I = \frac{1}{2}\varepsilon_0 c E_0^2} \qquad (23)$$

L'intensité lumineuse, que l'on mesure avec un photomètre, est donc proportionnelle au carré de l'amplitude du champ électrique associé à l'onde.

Remarques:

1/ L'intensité lumineuse I peut être calculée à partir de la densité volumique d'énergie dont l'expression dans le vide est :

$$\boxed{W_e = \frac{1}{2}(\varepsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{\mu_0})} \qquad (24)$$

2/ La puissance énergétique (ou flux énergétique) dP s'exprime en $J.s^{-1}$ (ou W).
L'intensité lumineuse (ou densité de flux énergétique) I s'exprime en $W.m^{-2}$.
La densité volumique d'énergie W_e s'exprime en $J.\ m^{-3}$.

CHAPITRE 3 : LOIS FONDAMENTALES DE L'OPTIQUE GEOMETRIQUE

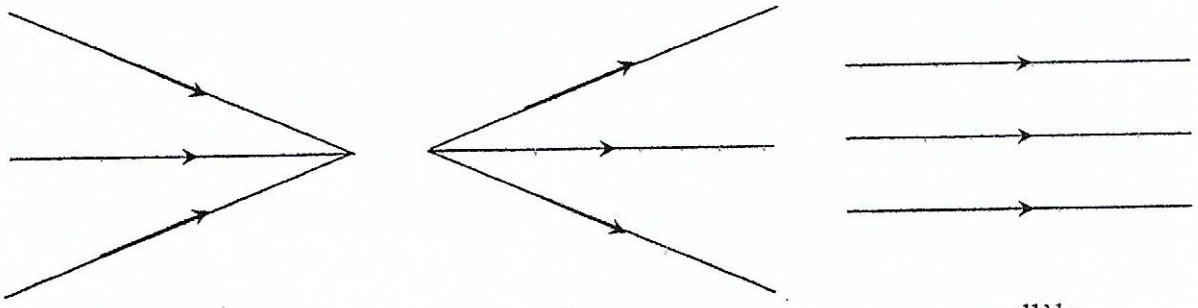
I - Propagation rectiligne de la lumière

1-1 Définitions

Un milieu homogène est un milieu dont la composition est la même en tous ses points.
Un milieu isotrope est un milieu dont les propriétés sont les mêmes dans toutes les directions.

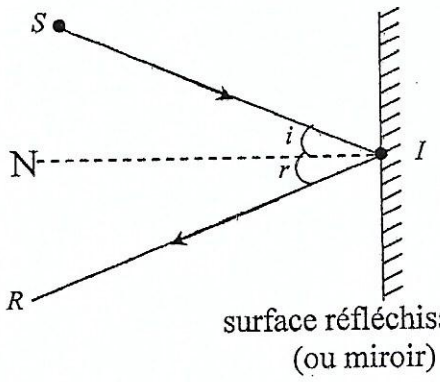
1-2 Principe de propagation rectiligne de la lumière

Dans un milieu homogène et isotrope, la lumière se propage en ligne droite.
La trajectoire de la lumière constitue un rayon lumineux.
Un ensemble peu étendu de rayons lumineux constitue un pinceau lumineux. Un ensemble plus étendu constitue un faisceau lumineux.



Pinceau (ou faisceau) : convergent divergent parallèle

II - Lois de la réflexion



surface réfléchissante
(ou miroir)

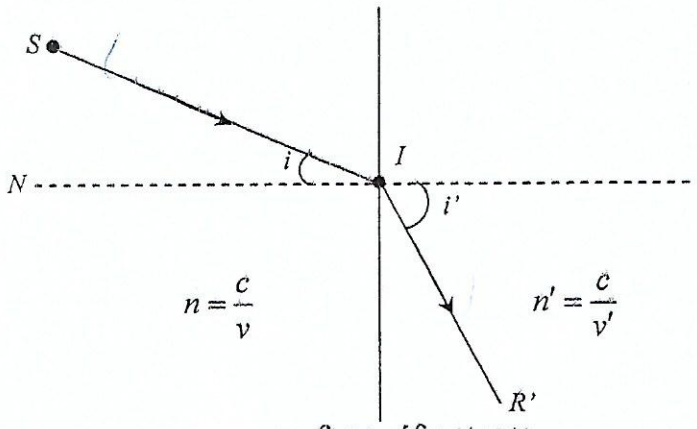
SI = rayon incident
IR = rayon réfléchi
I = point d'incidence
i = angle d'incidence
r = angle de réflexion

Première loi :
Le rayon réfléchi est contenu dans le plan d'incidence (plan contenant le rayon incident *SI* et la normale *IN*).

Deuxième loi :
Le rayon réfléchi est symétrique du rayon incident par rapport à la normale à la surface réfléchissante.
On a donc :

$$i = r \qquad (1)$$

III - Lois de la réfraction



surface réfractante
(ou dioptre ou surface dioptrique)

SI = rayon incident
IR' = rayon réfracté
n et n' : indices de réfraction des milieux de propagation
i = angle d'incidence
i' = angle de réfraction

Première loi :
Le rayon réfracté est contenu dans le plan d'incidence.

Deuxième loi :

$$n \sin i = n' \sin i' \qquad (2)$$

Angle de réfraction limite :
Lorsque la lumière passe d'un milieu dans un autre plus réfringent *(n' > n)* :

$$\left.\begin{array}{l} \sin i' = \dfrac{n}{n'} \sin i \\ \dfrac{n}{n'} < 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \sin i' < \sin i$$

$i, i' \in [0°, 90°]$

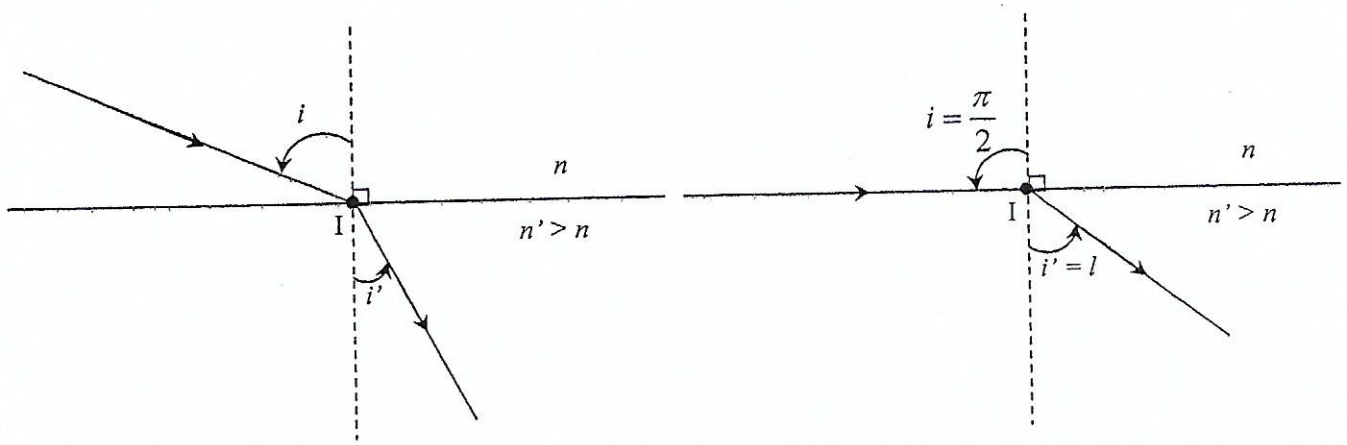
$\Rightarrow i' < i$

Le rayon se rapproche de la normale en pénétrant dans le milieu le plus réfringent.

Pour l'incidence rasante, où $i = 90°$, i' prend une valeur l, appelée angle de réfraction limite, donnée par :

$$n \sin 90° = n' \sin l$$

$$\sin l = \frac{n}{n'} \qquad (3)$$



Réflexion totale :
Lorsque la lumière passe d'un milieu dans un autre moins réfringent *(n'< n)* :

$$\left.\begin{array}{l} \sin i' = \dfrac{n}{n'}\sin i \\ \dfrac{n}{n'} > 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \sin i' > \sin i$$

$i, i' \in [0°, 90°]$

$\Rightarrow i' > i$

Le rayon réfracté est plus éloigné de la normale que le rayon incident.

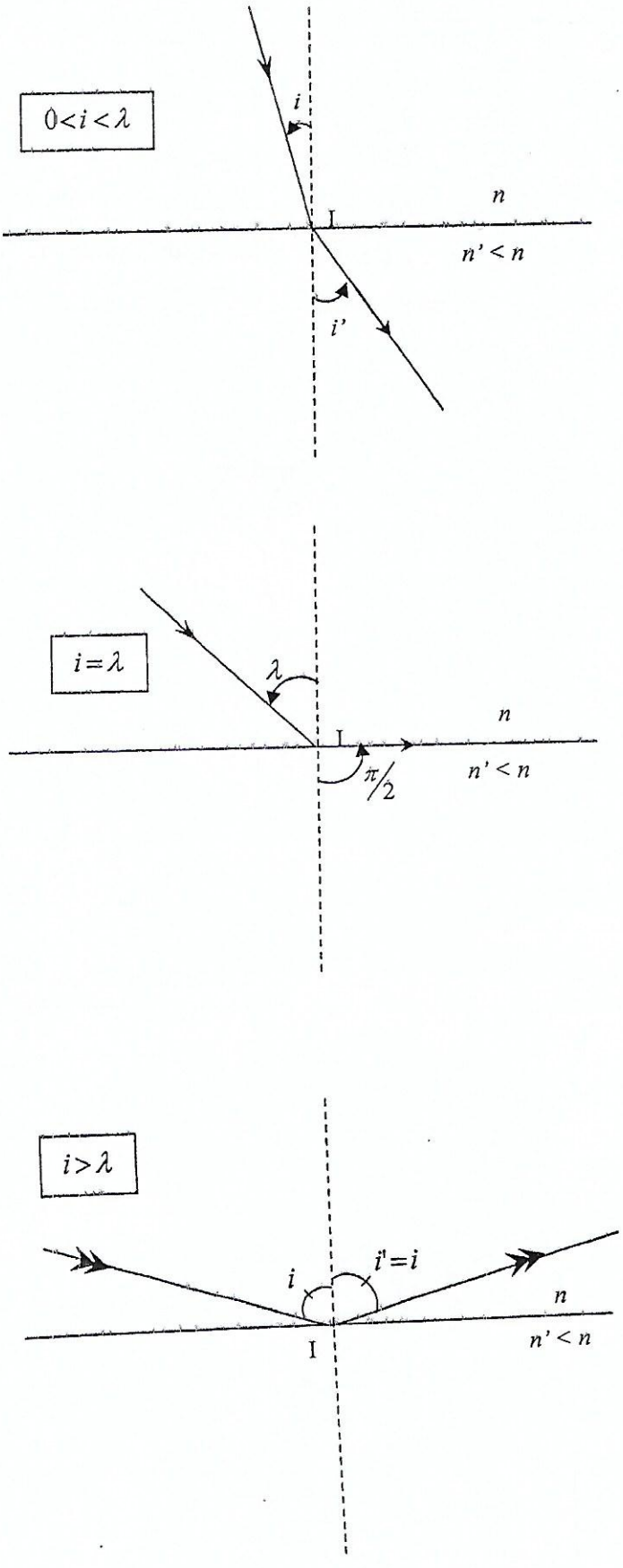
En faisant croître i à partir de 0, i' croît plus vite et atteint la valeur extrême de 90° pour une valeur λ de i telle que :

$$n \sin \lambda = n' \sin 90°$$

$$\sin \lambda = \frac{n'}{n} \qquad (4)$$

λ n'est autre que l'angle de réfraction limite l de la lumière passant du milieu d'indice n' dans le milieu d'indice n et défini par $\sin l = \dfrac{n'}{n}$.

Lorsque $i > \lambda$, il n' y a plus de rayon réfracté ; toute la lumière incidente est alors réfléchie : c'est le phénomène de réflexion totale.



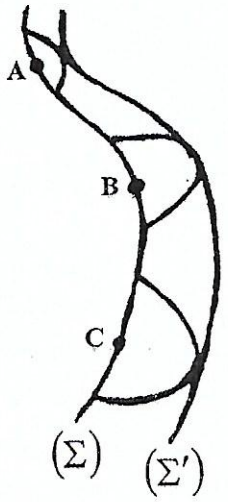
IV - Principe du retour inverse de la lumière

Le trajet suivi par la lumière entre deux points situés sur un même rayon lumineux est indépendant du sens de propagation de la lumière entre ces deux points.

V - Surface d'onde – Rayon lumineux

On appelle surface d'onde l'ensemble des points du milieu de propagation que l'onde atteint au même instant.

La construction d'Huygens permet de tracer la surface d'onde (Σ') à l'instant t' lorsqu'on connaît la surface d'onde (Σ) à l'instant t : chaque point *A, B, C...* de (Σ) est considéré comme une source secondaire émettant une ondelette sphérique de rayon $v_A(t'-t)$, $v_B(t'-t)$, $v_C(t'-t)$.., v_A, v_B, v_C ... étant les vitesses de l'onde en *A, B, C...* ; et la surface d'onde (Σ') est l'enveloppe de toutes ces ondelettes.



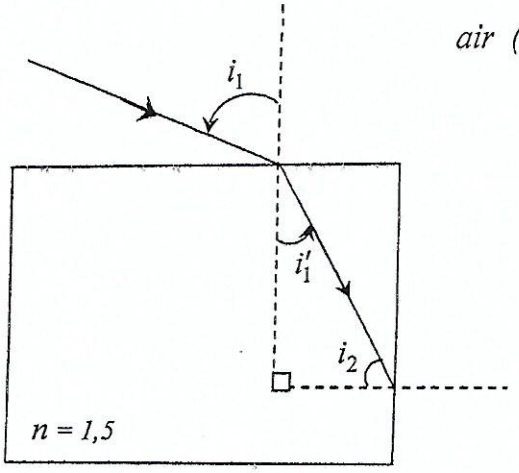
On définit les rayons lumineux comme les trajectoires orthogonales aux surfaces d'onde.

VI – Exercice d'application

6-1 Enoncé

Un cube de verre a un indice de réfraction de 1,5. Un rayon lumineux entre par la face supérieure obliquement et frappe le côté du cube. La lumière émerge-t-elle de ce côté ? (Expliquez votre réponse).

6-2 Solution



Soient i_1 et i_1' (respectivement i_2 et i_2') les angles d'incidence et de réfraction au niveau de la face supérieure (respectivement du côté droit).

$$\left.\begin{array}{l}\sin i_1 = n \sin i_1' \\ n > 1\end{array}\right\} \Rightarrow i_1 > i_1' \Rightarrow$$ le phénomène de réfraction existe toujours sur la face supérieure.

$$\left.\begin{array}{l}n \sin i_2 = \sin i_2' \\ n > 1\end{array}\right\} \Rightarrow i_2 < i_2'$$

Lorsque i_2' atteint sa valeur maximale (90°), i_2 prend la valeur :

$$i_l = \sin^{-1}\left(\frac{1}{n}\right) = \sin^{-1}\left(\frac{1}{1,5}\right) \simeq 41°49'$$

i_l = angle de réfraction limite

Le rayon qui frappe le côté droit n'émergera de ce côté que si $i_2 \leq i_l$.

$$\sin i_1 = n \sin i_1' \qquad i_1' + i_2 = 90°$$

$$\sin i_1 = n \sin(90° - i_2) = n \cos i_2$$

$$i_2 = \cos^{-1}\left(\frac{\sin i_1}{n}\right)$$

Lorsque $i_1 = 90°$, i_1' est maximal, i_2 est minimal :

$$i_{2\min} = \cos^{-1}\left(\frac{1}{n}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{1}{1,5}\right) \simeq 48°11'$$

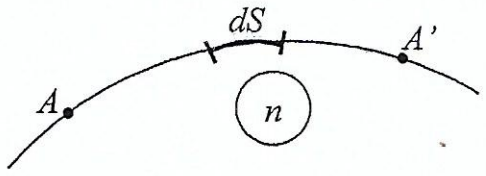
$i_{2\min} = 48°11' > i_l = 41°49' \Rightarrow$ la lumière n'émergera pas de ce côté (il y aura une réflexion totale sur ce côté).

CHAPITRE 4 : PRINCIPE DE FERMAT - STIGMATISME

A – PRINCIPE DE FERMAT

I – Chemin optique

Soient deux points A et A' situés sur le même rayon lumineux. Soit un élément d'arc dS compté sur ce rayon lumineux et soit n l'indice de réfraction du milieu de propagation au voisinage de dS.



On appelle chemin optique entre A et A', noté $L_{AA'}$ ou (AA') :

$$(AA') = \int_A^{A'} n dS \qquad (1)$$

$$(AA') = \int_A^{A'} n dS = \int_A^{A'} \frac{c}{v} dS = c \int_A^{A'} \frac{dS}{v} = c \int_A^{A'} dt = c.t_{AA'}$$

Le chemin optique (AA') représente donc la distance que la lumière aurait parcourue dans le vide pendant le temps qu'elle met pour aller de A à A' dans le milieu réel de propagation.

Soit dL la variation élémentaire de chemin optique le long de dS :

$$dL = n dS$$

$\vec{u}$ étant le vecteur unitaire du rayon lumineux le long de dS :

$$dS = \overrightarrow{dr}.\vec{u}$$

$$\Rightarrow dL = n\overrightarrow{dr}.\vec{u} = (n\vec{u}).\overrightarrow{dr}$$

Or $dL = \left(\overrightarrow{grad L}\right).\overrightarrow{dr}$

Par identification on a :

$$\overrightarrow{grad L} = n\vec{u} \qquad (2)$$

Le vecteur $\overrightarrow{gradL}$ est orthogonal à la surface isoscalaire $L = cte$. Le rayon lumineux (défini par $\vec{u}$) est donc perpendiculaire à la surface $L = cte$. Cette dernière étant une surface d'onde, on retrouve ainsi le théorème de Malus.

II - Principe de Fermat

Ce principe constitue le principe fondamental de l'optique géométrique. Il s'énonce ainsi :
Le chemin optique entre deux points quelconques A et A' situés sur un même rayon lumineux qui se réfléchit ou se réfracte sur un nombre quelconque de surfaces est stationnaire (ou extrémal), c'est-à-dire de dérivées partielles nulles par rapport aux paramètres qui définissent les points de rencontre avec les dioptres ou miroirs successifs.

$$dL = 0 \qquad (3)$$

III - Conséquences immédiates du principe de Fermat

3-1 Propagation rectiligne de la lumière

Si les points A et A' sont dans le même milieu homogène et isotrope d'indice n constant :

$$(AA') = \int_A^{A'} ndS = n\int_A^{A'} dS = n\overset{\frown}{AA'}$$

(AA') doit être extrémal, c'est-à-dire $\overset{\frown}{AA'}$ doit être maximal ou minimal. Comme $\overset{\frown}{AA'}$ ne saurait être maximal, car cela n'aurait aucune signification physique, il ne peut être que minimal. Donc *AA'* doit être un segment de droite. On retrouve ainsi le principe de propagation rectiligne de la lumière dans un milieu homogène et isotrope.

3-2 Théorème de Malus-Dupin

3-2-1 Différentielle d'un chemin optique rectiligne

$$L(AB) = nAB = n\vec{u}.\overrightarrow{AB}\text{, où } \vec{u} = \frac{\overrightarrow{AB}}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|} = \frac{\overrightarrow{AB}}{AB}$$

$$dL(AB) = n\overrightarrow{AB}.d\vec{u} + n\vec{u}.d\overrightarrow{AB} = nAB\vec{u}.d\vec{u} + n\vec{u}.d\overrightarrow{AB}$$

$\vec{u}^2 = \left\|\vec{u}\right\|^2 = 1^2 = 1 \Rightarrow d(\vec{u}^2) = 2\vec{u}.d\vec{u} = 0$. Donc :

$$dL(AB) = n\vec{u}.d\overrightarrow{AB} \qquad (4)$$

3-2-2 Théorème de Malus-Dupin

Soient deux point A_1' et A_2' infiniment voisins situés sur deux rayons émergents isogènes (c'est-à-dire issus d'un même point A).

$$d(AA') = (AA'_2) - (AA'_1) = n\vec{u}.d\overrightarrow{AA'} = n\vec{u}.\left(\overrightarrow{AA'_2} - \overrightarrow{AA'_1}\right) = n\vec{u}.\overrightarrow{A'_1A'_2}$$

Si A'_1 et A'_2 sont situés sur la même surface d'onde :

$$(AA'_1) = (AA'_2)$$

$$\Rightarrow d(AA') = 0 = n\vec{u}.\overrightarrow{A'_1A'_2}$$

$$\Rightarrow \vec{u} \perp \overrightarrow{A'_1A'_2}$$

Ainsi les rayons lumineux (définis par $\vec{u}$) sont perpendiculaires aux surfaces d'onde (définies par $\overrightarrow{A'_1A'_2}$) en leurs points d'intersection.
Ceci constitue le théorème de Malus-Dupin.

3-3 Autres conséquences du principe de Fermat

- Le principe du retour inverse de la lumière.
- Les lois de la réflexion et celles de la réfraction, encore appelées lois de Snell-Descartes.

B – STIGMATISME ET APLANETISME

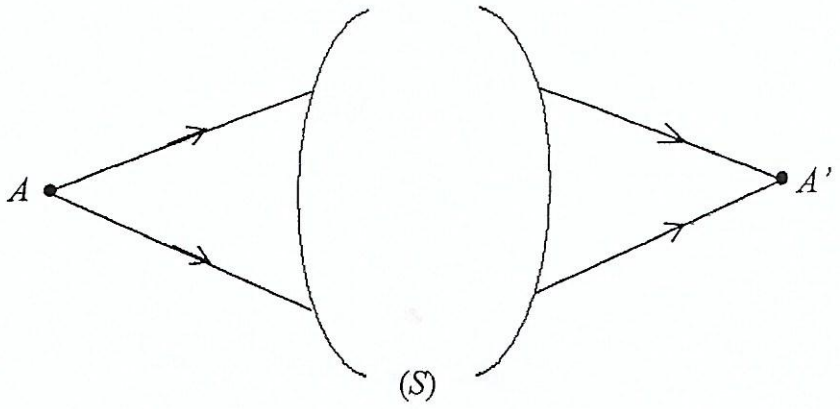
I – Définitions

1-1 Système optique

On appelle système optique l'ensemble d'un certain nombre de milieux transparents en général homogènes et isotropes séparés par des surfaces réfractantes (dioptres) ou réfléchissantes (miroirs).
Les systèmes utilisés sont souvent centrés, c'est-à-dire qu'ils possèdent un axe de symétrie.
On distingue trois catégories de systèmes :

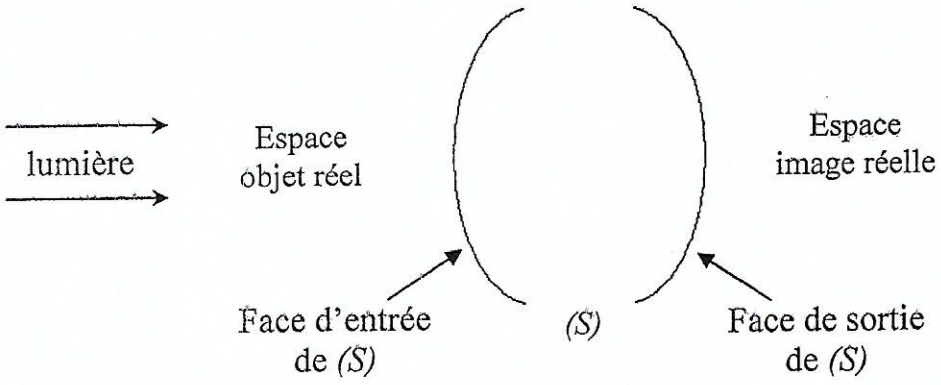
- les systèmes dioptriques : comportant seulement des dioptres ;
- les systèmes catadioptriques : comportant des dioptres et des miroirs ;
- les systèmes catoptriques : comportant seulement des miroirs.

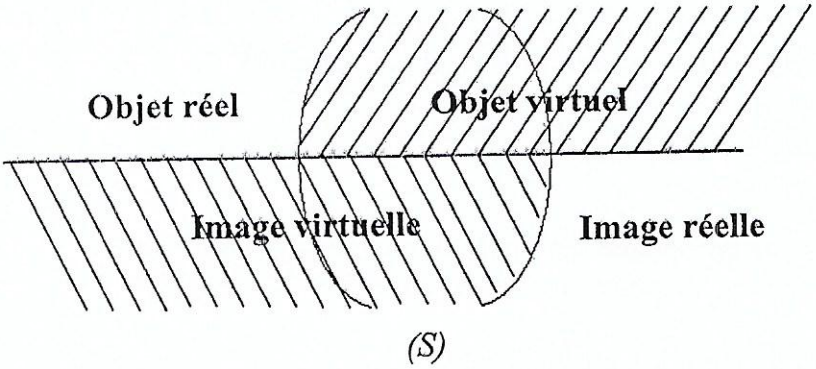
1-2 Image d'un point



A' est l'image de A à travers le système optique *(S)*.

1-3 Caractère réel et virtuel





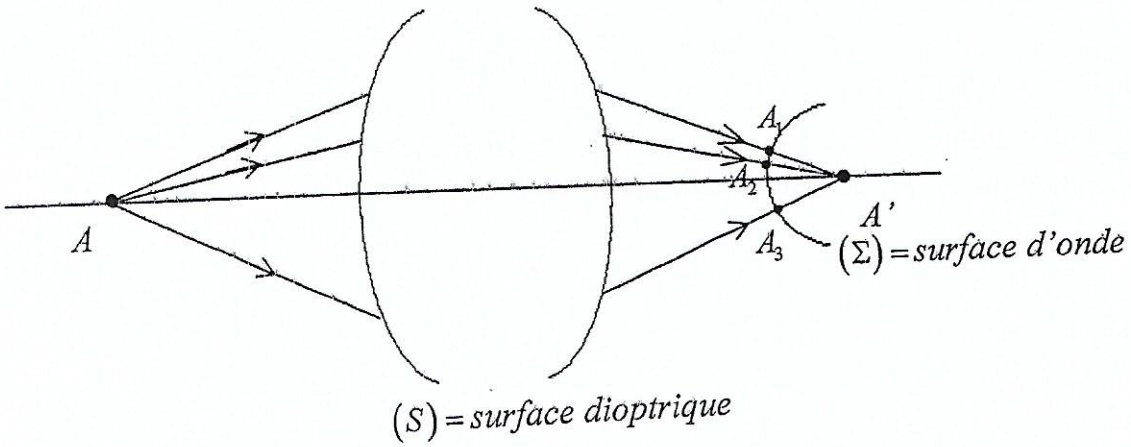
II - Stigmatisme rigoureux

2-1 Définition

Un système optique est dit rigoureusement stigmatique pour le couple de points *(A,A')* si tous les rayons issus de A passent par A' après avoir traversé le système.
Les points A et A' sont dits conjugués par rapport au système.

2-2 Condition de stigmatisme rigoureux

Si A et A' sont réels :



(Σ) étant une surface d'onde on a :

$$(AA_1)=(AA_2)=(AA_3)=...$$
$$\Rightarrow (AA_i)=cte \quad \forall i$$

D'après le théorème de Malus (Σ) est perpendiculaire à $[A_1A']$, $[A_2A']$, $[A_3A']$ ...

$\Rightarrow (\Sigma)$ est une sphère de centre A'

$$\Rightarrow A_iA'=cte \quad \forall i$$
$$\Rightarrow (A_iA')=cte \quad \forall i$$
$$\Rightarrow (AA_i)+(A_iA')=cte \quad \forall i$$

$$\Rightarrow (AA')=cte \qquad (5)$$

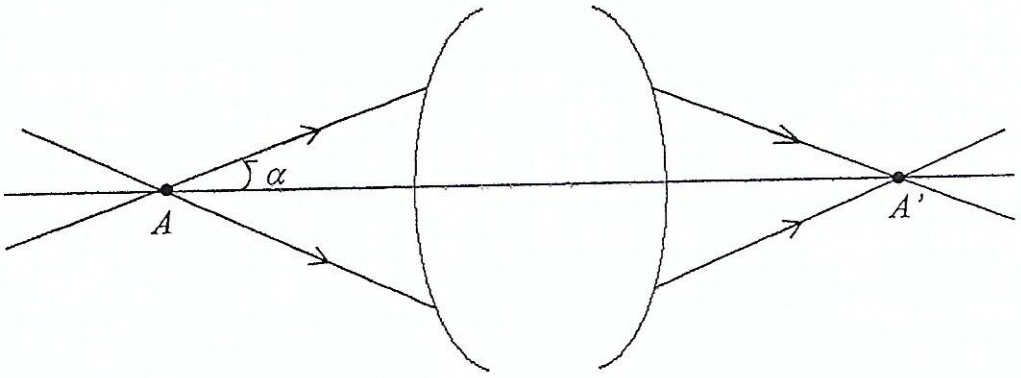
Ceci constitue la condition de stigmatisme rigoureux. Elle est valable dans chacun des 4 cas possibles : A réel, A' réel ; A réel, A' virtuel ; A virtuel, A' réel ; A virtuel, A' virtuel.

III - Stigmatisme approché

3-1 Définition

On dit qu'un système optique est approximativement stigmatique pour le couple de points *(A,A')* lorsque l'image du point objet A est une tache de très petites dimensions centrée en A'.

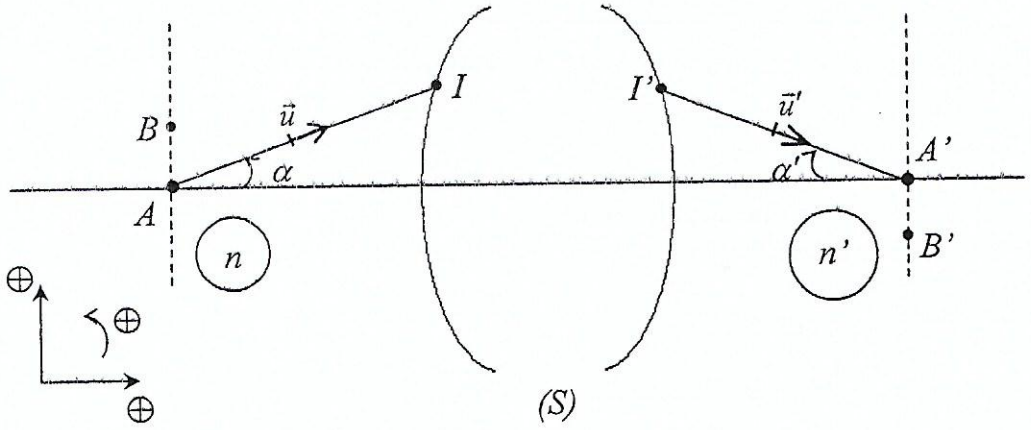
3-2 Condition de stigmatisme approché



(S) = système centré

Le système centré *(S)* réalise le stigmatisme approché pour tous les points de l'axe optique à condition que les rayons émis soient paraxiaux (angles α petits).

IV - Aplanétisme



A et A' sont deux points de l'axe pour lesquels le système centré *(S)* est rigoureusement stigmatique.
B et B' sont deux points très proches de A et A' respectivement et situés dans des plans perpendiculaires à l'axe en A et A' (plans de front).
Etablissons la condition pour que le système *(S)* soit aussi rigoureusement stigmatique pour B et B'. Il sera alors dit aplanétique pour A et A'.

A et A' étant rigoureusement stigmatiques $(AA') = cte$

B et B' seront également rigoureusement stigmatiques si : $(BB') = cte$

$$\Rightarrow (BB') - (AA') = [(BI) + (II') + (I'B')] - [(AI) + (II') + (I'A')] = cte$$

$$[(BI) - (AI)] + [(I'B') - (I'A')] = cte$$

$$d(AI) + d(I'A') = cte$$

$$n\vec{u}.d\overrightarrow{AI} + n'\vec{u}'.d\overrightarrow{I'A'} = cte$$

$$n\vec{u}.\left(\overrightarrow{BI} - \overrightarrow{AI}\right) + n'\vec{u}'.\left(\overrightarrow{I'B'} - \overrightarrow{I'A'}\right) = cte$$

$$n\vec{u}.\overrightarrow{BA} + n'\vec{u}'.\overrightarrow{A'B'} = cte$$

En algébrisant comme indiqué sur la figure ci-dessus, on obtient :

$$n.BA.\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + n'.A'B'.\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha'\right) = cte$$

$$-n.\overline{AB}.\sin\alpha + n'.\overline{A'B'}.\sin\alpha' = cte$$

Si $\alpha = 0$, $\alpha' = 0 \Rightarrow cte = 0$

$$\Rightarrow \quad n.\overline{AB}.\sin\alpha = n'.\overline{A'B'}.\sin\alpha' \qquad (6)$$

Condition d'aplanétisme (ou condition d'Abbe ou condition des sinus).

Remarques :

a) La condition d'aplanétisme ne stipule rien sur les angles α et α' : ils peuvent prendre des valeurs élevées. Elle stipule seulement que AB et A'B' sont petits.

b) Si les rayons sont paraxiaux :

$\sin\alpha \approx \alpha$, $\sin\alpha' \approx \alpha'$

$$\Rightarrow n.\overline{AB}.\alpha = n'.\overline{A'B'}.\alpha' \qquad (7)$$

Relation de Lagrange-Helmholtz

V - Conditions de l'approximation de Gauss

Ces conditions permettent d'obtenir une image convenable d'un objet et traduisent le stigmatisme approché dans un petit volume. Elles sont les suivantes :

- l'objet doit être plan, perpendiculaire à l'axe, de petites dimensions ;
- il ne doit envoyer sur le système que des rayons paraxiaux.

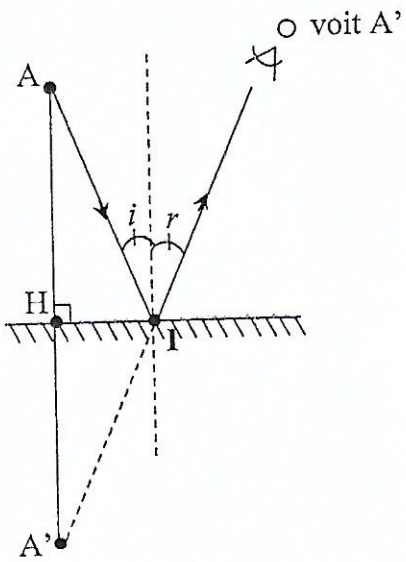
L'image obtenue dans ces conditions est de bonne qualité, plane, perpendiculaire à l'axe.

CHAPITRE 5 : MIROIR PLAN
DIOPTRE PLAN – LAME A FACES PARALLELES – PRISME

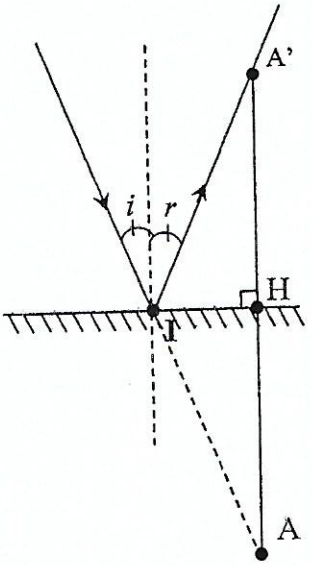
A - MIROIR PLAN

I - Définition – Stigmatisme

Un miroir plan est une surface plane capable de réfléchir la quasi-totalité de la lumière qu'elle reçoit, quel que soit l'angle d'incidence.
Le miroir plan donne de tout point objet A une image A' rigoureusement stigmatique, symétrique du point objet par rapport au plan du miroir.



A réel, A' virtuelle



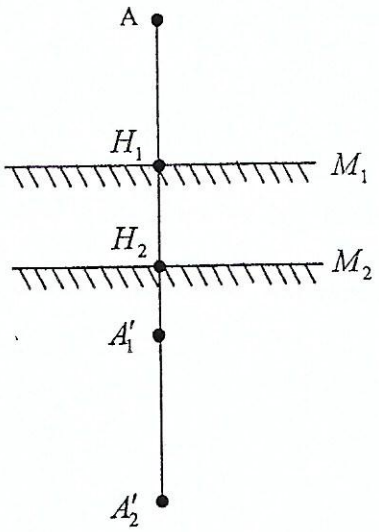
A virtuel, A' réelle

Dans un miroir plan, l'objet et l'image sont toujours de natures opposées.

$$\overline{AH} = \overline{HA'} \qquad (1)$$

II - Déplacement du miroir

2-1 Translation

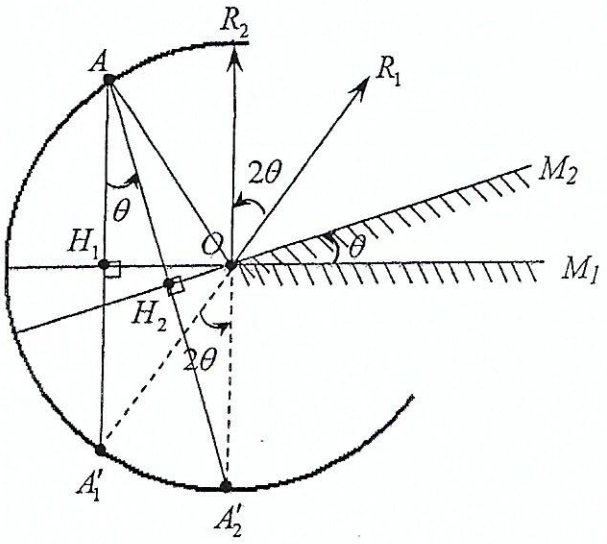


$$\overline{A'_1A'_2} = \overline{A'_1H_1} + \overline{H_1H_2} + \overline{H_2A'_2}$$
$$\overline{A'_1H_1} = \overline{H_1A}$$
$$\overline{H_2A'_2} = \overline{AH_2}$$
$$\Rightarrow \overline{A'_1A'_2} = \overline{H_1A} + \overline{H_1H_2} + \overline{AH_2} = \underbrace{\overline{H_1A} + \overline{AH_2}}_{\overline{H_1H_2}} + \overline{H_1H_2}$$

$$\boxed{\overline{A'_1A'_2} = 2\overline{H_1H_2} \qquad (2)}$$

Ainsi l'image se déplace dans le même sens que le miroir et d'une longueur double.

2-2 Rotation



$\left.\begin{array}{l} OA = OA_1' \\ OA = OA_2' \end{array}\right\} \Rightarrow OA = OA_1' = OA_2' \Rightarrow$ A, A_1' et A_2' sont situés sur le cercle de centre O et de rayon OA.

$\widehat{A_1' O A_2'}$ est l'angle au centre qui intercepte le même arc que l'angle inscrit $\widehat{A_1' A A_2'}$. Donc :

$$\widehat{A_1' O A_2'} = 2\,\widehat{A_1' A A_2'}$$

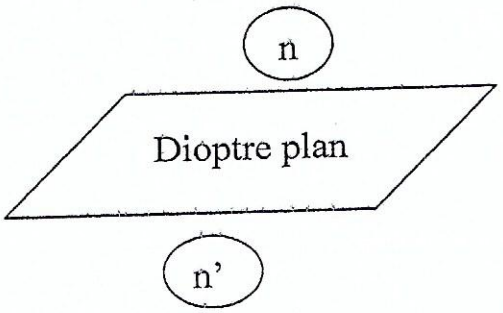
$$\widehat{R_1 O R_2} = \widehat{A_1' O A_2'} = 2\,\widehat{A_1' A A_2'} = 2\theta \qquad (3)$$

Conclusion :
Lorsqu'un miroir plan tourne d'un angle θ autour d'un axe quelconque, le rayon réfléchi correspondant à un incident quelconque tourne autour de cet axe et dans le même sens d'un angle double 2θ.

B - DIOPTRE PLAN

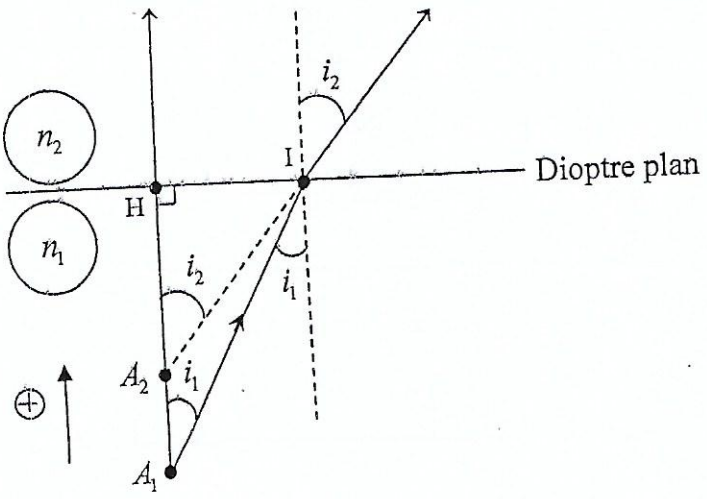
I - Définition

Un dioptre plan est une surface plane séparant deux milieux transparents, homogènes et isotropes, d'indices de réfraction différents.



II – Stigmatisme

2-1 Stigmatisme rigoureux



A_2 est l'image de A_1.

$$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$$

$$n_1 . \frac{IH}{IA_1} = n_2 . \frac{IH}{IA_2}$$

$$\frac{n_1}{IA_1} = \frac{n_2}{IA_2} \qquad (4)$$

$\Rightarrow A_2$ n'est pas fixe ; il dépend de I.

$\Rightarrow$ Il n'y a pas de stigmatisme rigoureux pour un point pris à distance finie en dehors du dioptre plan.

Remarque : Le seul cas intéressant de stigmatisme rigoureux du dioptre plan est celui des points à l'infini.

2-2 Stigmatisme approché

A_1 n'envoie sur le dioptre que des rayons paraxiaux (i_1 faible, I proche de H).

$$IA_1 \approx HA_1 = -\overline{HA_1}$$

$$IA_2 \approx HA_2 = -\overline{HA_2}$$

$$(4) \Rightarrow \frac{n_1}{-\overline{HA_1}} = \frac{n_2}{-\overline{HA_2}}$$

$$\frac{\overline{HA_1}}{n_1} = \frac{\overline{HA_2}}{n_2} \qquad (5)$$

(Formule de conjugaison du dioptre plan)

Remarques :

a) $\overline{HA_1}$ et $\overline{HA_2}$ sont toujours de même signe. Donc A_1 et A_2 sont tous deux dans le même milieu et, de ce fait, toujours de natures opposées.

b) Déplacement apparent de l'objet :

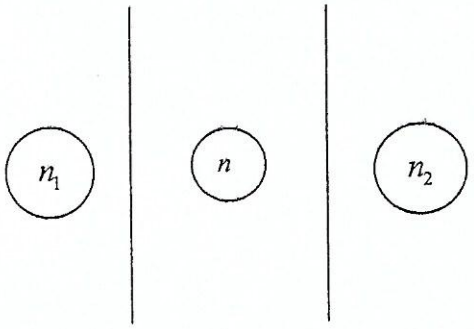
$$\overline{A_1A_2} = \overline{A_1H} + \overline{HA_2} = \overline{A_1H} + \frac{n_2}{n_1}\overline{HA_1} = \overline{A_1H} - \frac{n_2}{n_1}\overline{A_1H}$$

$$\overline{A_1A_2} = \overline{A_1H}\left(1 - \frac{n_2}{n_1}\right) \qquad (6)$$

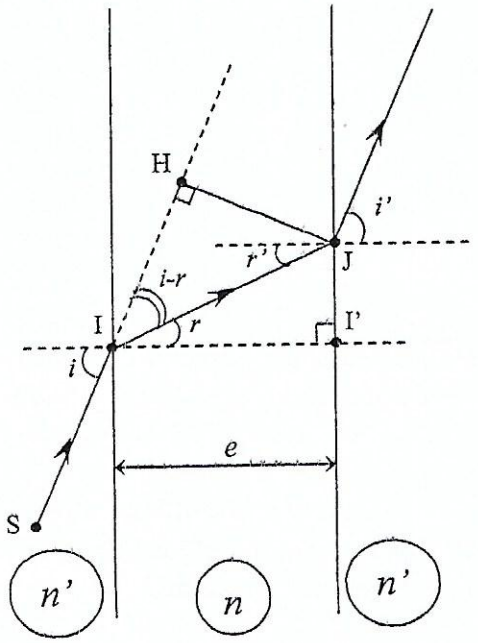
C - LAME A FACES PARALLELES

I - Définition

Une lame à faces parallèles est constituée par un milieu transparent, homogène et isotrope limité par deux faces planes et parallèles baignant dans un même milieu ou dans des milieux différents.



II - Déplacement latéral du rayon



$$\left.\begin{array}{l} r = r' \\ n_1 = n_2 = n' \end{array}\right\} \Rightarrow i = i'$$

(cas où $n > n'$)

e = épaisseur de la lame.

$d = JH$ = déplacement latéral du rayon SI.

Dans le triangle IHJ : $\sin(i-r) = \dfrac{JH}{IJ} = \dfrac{d}{IJ}$

$$\Rightarrow d = IJ.\sin(i-r)$$

Dans le triangle $II'J$: $\cos r = \dfrac{II'}{IJ} = \dfrac{e}{IJ}$

$$\Rightarrow IJ = \frac{e}{\cos r}$$

Donc on a : $d = \frac{e}{\cos r}.\sin(i-r)$

$$d = e.\frac{\sin(i-r)}{\cos r} \qquad (7)$$

Si $i = 0 \Rightarrow \begin{cases} r = 0 \\ d = e.\frac{0}{1} = 0 \end{cases}$

Si $i = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \begin{cases} r = l \\ d = e.\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - l\right)}{\cos l} = e.\frac{\cos l}{\cos l} = e \end{cases}$

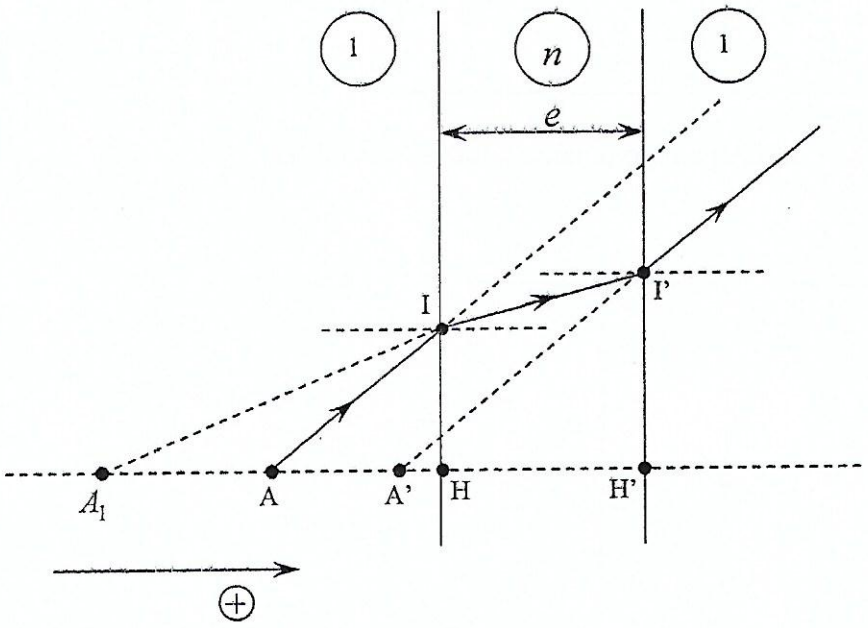
(l est l'angle limite)

$$\Rightarrow 0 \leq d \leq e \qquad (8)$$

III - Relation de conjugaison et dioptre équivalent

Le stigmatisme rigoureux n'est réalisé que pour les points à l'infini. En dehors de ce cas, le stigmatisme, s'il existe, sera seulement approché. Le stigmatisme approché de la lame est réalisé lorsque le point objet n'envoie que des rayons sensiblement normaux aux faces de la lame.

Le dioptre d'entrée donne d'un point objet réel A une image virtuelle A_1 qui joue le rôle d'objet réel pour le dioptre de sortie ; l'image définitive A' est donc virtuelle. L'objet A et son image A' à travers la lame sont toujours de natures opposées.



Les relations de conjugaison des deux dioptres plans (dans les conditions de stigmatisme approché) donnent :

$$\frac{\overline{HA}}{1} = \frac{\overline{HA_1}}{n}$$

$$\frac{\overline{H'A_1}}{n} = \frac{\overline{H'A'}}{1}$$

Donc on a : $\overline{AA'} = \overline{AH} + \overline{HH'} + \overline{H'A'}$

$$= \frac{\overline{A_1H}}{n} + e + \frac{\overline{H'A_1}}{n}$$

$$= e + \frac{1}{n}\left(\overline{H'A_1} + \overline{A_1H}\right)$$

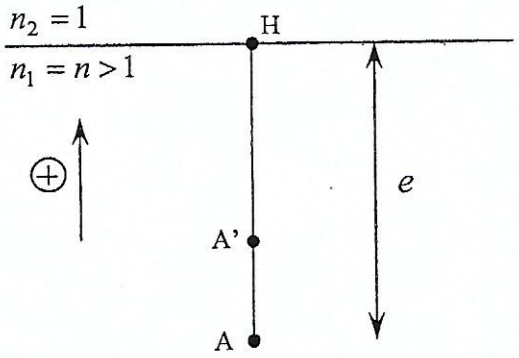
$$= e + \frac{1}{n}\overline{H'H}$$

$$= e - \frac{1}{n}e$$

$$= e\left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

$$\overline{AA'} = e\left(1-\frac{1}{n}\right) \qquad (9)$$

(Formule de conjugaison de la lame à faces parallèles)



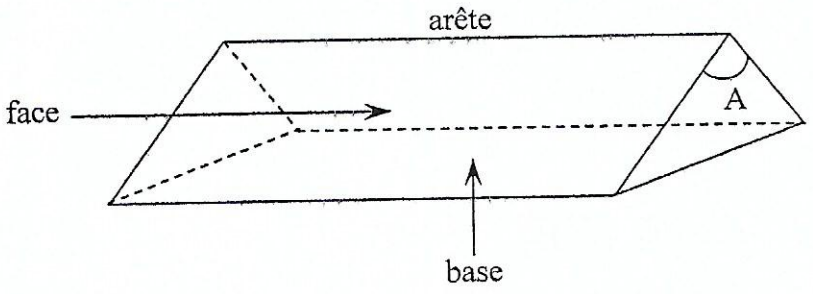
$$\overline{AA'} = \overline{AH}\left(1-\frac{n_2}{n_1}\right) = e\left(1-\frac{1}{n}\right)$$

La lame à faces parallèles est donc équivalente à un dioptre plan unique placé à la distance e de l'objet.

D - LE PRISME

I - Définitions

Un prisme est un milieu transparent homogène et isotrope limité par deux dioptres plans non parallèles formant un angle dièdre A.



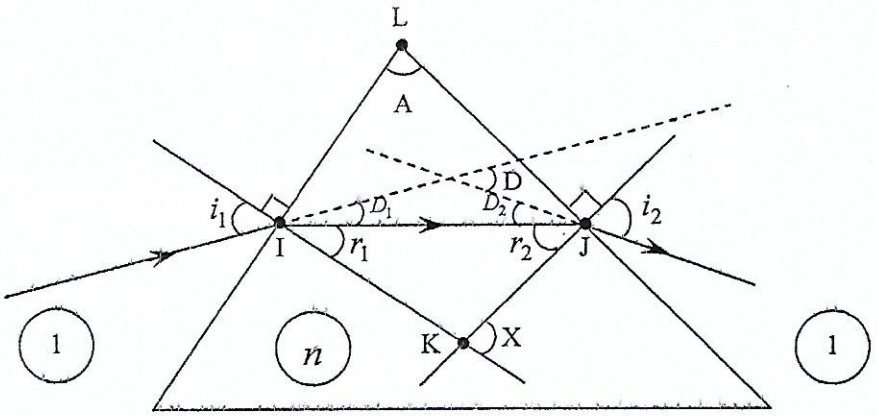
La droite intersection des deux dioptres plans (appelés faces d'entrée et de sortie) est l'arête du prisme. Un plan perpendiculaire à l'arête est un plan de section principale. La face opposée à l'arête est la base du prisme.
A est l'angle du prisme (ou l'angle au sommet du prisme).

II - Stigmatisme

Pour que le stigmatisme rigoureux du prisme soit réalisé, il faut qu'il y ait simultanément stigmatisme pour les deux faces. Cela n'est possible que pour les points à l'infini et ceux de l'arête.

III - Marche d'un rayon lumineux monochromatique

3-1 Formules du prisme



D = Déviation totale

$$D = D_1 + D_2 = (i_1 - r_1) + (i_2 - r_2) = i_1 + i_2 - (r_1 + r_2)$$

Dans le triangle IJK : $r_1 + r_2 + (\pi - X) = \pi \Rightarrow X = r_1 + r_2$

Dans le quadrilatère $LIKJ$: $A + \frac{\pi}{2} + (\pi - X) + \frac{\pi}{2} = 2\pi \Rightarrow X = A$

$$\Rightarrow X = r_1 + r_2 = A$$

$$\Rightarrow D = i_1 + i_2 - A$$

Les formules du prisme sont les suivantes :

$\sin i_1 = n \sin r_1$	(10)
$\sin i_2 = n \sin r_2$	(11)
$A = r_1 + r_2$	(12)
$D = i_1 + i_2 - A$	(13)

3-2 Conditions d'émergence

$$\left.\begin{array}{l} \sin i_1 = n \sin r_1 \\ n > 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \sin r_1 < \sin i_1 \Rightarrow r_1 < i_1$$

Donc tout rayon incident pénètrera dans le prisme.

En revanche, il n'en émergera que si : $r_2 \leq \lambda$, où $\lambda = \arcsin\left(\frac{1}{n}\right)$ (angle limite)

Or $r_1 \leq \lambda$

Donc le rayon ne pourra émerger que si :

$r_1 + r_2 \leq 2\lambda$, soit :

$$A \leq 2\lambda, \text{ où } \lambda = Arc\sin\left(\frac{1}{n}\right) \qquad (14)$$

Même si cette condition est satisfaite, un rayon incident n'émergera du prisme que si :

$r_2 \leq \lambda$

$-r_2 \geq -\lambda$

$A - r_2 \geq A - \lambda$

$r_1 \geq A - \lambda$

$\Rightarrow i_1 \geq i_0$ tel que $\sin i_0 = n\sin(A - \lambda)$

$$i_0 \leq i_1 \leq \frac{\pi}{2}, \text{ où } \sin i_0 = n\sin(A-\lambda) = n\sin\left[A - Arc\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right] \qquad (15)$$

IV - Etude de la déviation

4-1 Variation de D avec i_1, à A et n constants

$D = i_1 + i_2 - A$

$\frac{dD}{di_1} = 1 + \frac{di_2}{di_1}$

$\sin i_1 = n\sin r_1 \Rightarrow \cos i_1 di_1 = n\cos r_1 dr_1$

$\sin i_2 = n\sin r_2 \Rightarrow \cos i_2 di_2 = n\cos r_2 dr_2$

$$\Rightarrow \frac{di_2}{di_1} = \frac{\cos i_1}{\cos i_2}.\frac{\cos r_2}{\cos r_1}.\frac{dr_2}{dr_1}$$

$$r_1 + r_2 = A \Rightarrow dr_1 + dr_2 = 0 \Rightarrow \frac{dr_2}{dr_1} = -1$$

$$\Rightarrow \frac{dD}{di_1} = 1 - \frac{\cos i_1.\cos r_2}{\cos i_2.\cos r_1} = \frac{\cos i_2 \cos r_1 - \cos i_1 \cos r_2}{\cos i_2.\cos r_1} \qquad (16)$$

✶ D passe par un extremum si :

$$\frac{dD}{di_1} = 0$$

$$\cos^2 i_2.\cos^2 r_1 = \cos^2 i_1.\cos^2 r_2$$

$$\left(1 - \sin^2 i_2\right)\left(1 - \frac{\sin^2 i_1}{n^2}\right) = \left(1 - \sin^2 i_1\right)\left(1 - \frac{\sin^2 i_2}{n^2}\right)$$

$$\frac{\sin^2 i_1}{n^2} + \sin^2 i_2 = \frac{\sin^2 i_2}{n^2} + \sin^2 i_1$$

$$\sin^2 i_1\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \sin^2 i_2\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$$

$$\sin^2 i_1 = \sin^2 i_2$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} i_1 = i_2 = i_m \\ r_1 = r_2 = r_m \end{vmatrix}$$

$$r_1 + r_2 = A \Rightarrow 2r_m = A \Rightarrow r_m = \frac{A}{2}$$

$$\sin i_m = n \sin\frac{A}{2} \Rightarrow i_m = Arc\sin\left(n \sin\frac{A}{2}\right)$$

✶ Conditions d'émergence du prisme :

$$\begin{vmatrix} A \le 2\lambda \\ i_0 \le i_1 \le \dfrac{\pi}{2} \end{vmatrix} \quad \text{où :} \quad \sin\lambda = \frac{1}{n} \text{ et } \sin i_0 = n\sin(A - \lambda)$$

- si $i_1 = i_0$: $\sin i_1 = \sin i_0 = n\sin(A-\lambda) = n\sin r_1$

  $\Rightarrow r_1 = A-\lambda \Rightarrow r_2 = A-r_1 = \lambda \Rightarrow i_2 = \dfrac{\pi}{2}$

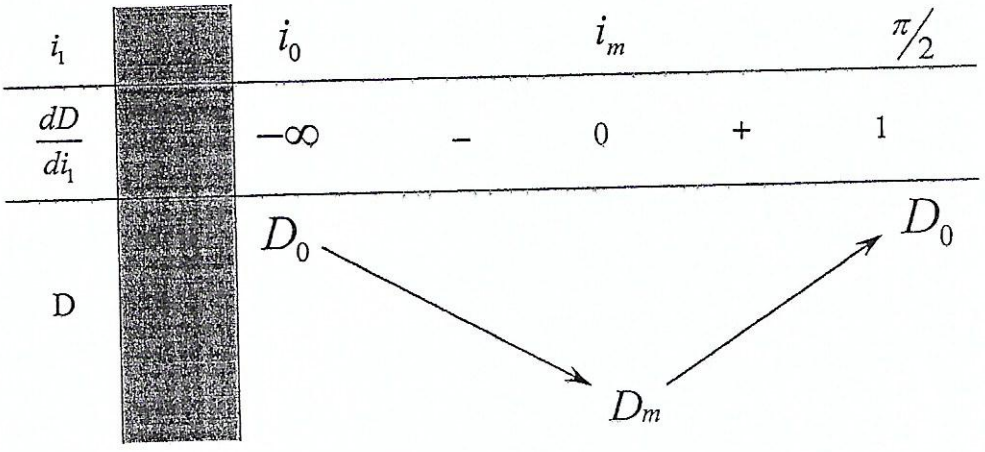
  $\dfrac{dD}{di_1} \to -\infty$

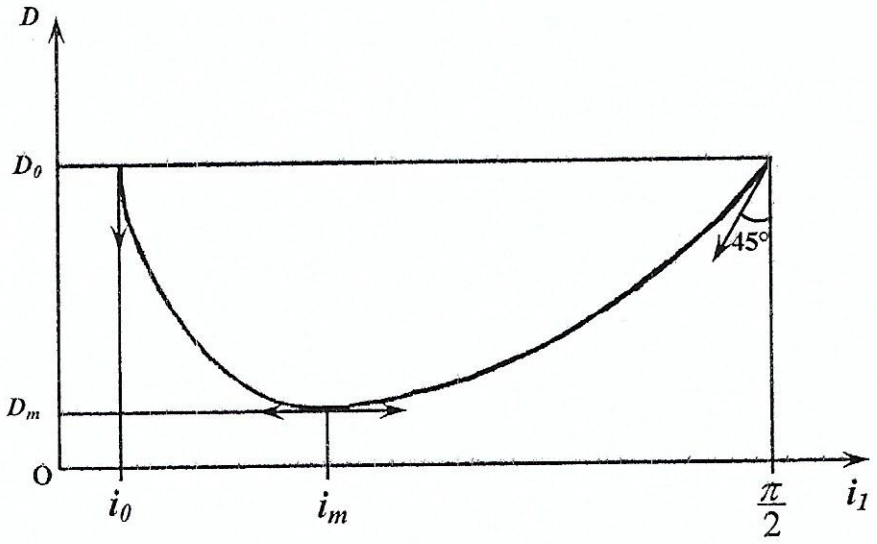
  $D = i_1 + i_2 - A = i_0 + \dfrac{\pi}{2} - A = D_0$

- si $i_1 = i_m$: $\dfrac{dD}{di_1} = 0$ et $D = i_1 + i_2 - A = 2i_m - A = D_m$

- si $i_1 = \dfrac{\pi}{2}$: $r_1 = \lambda \Rightarrow r_2 = A - r_1 = A - \lambda \Rightarrow i_2 = i_0$

  $\dfrac{dD}{di_1} = 1$ et $D = i_1 + i_2 - A = \dfrac{\pi}{2} + i_0 - A = D_0$





$$\sin i_m = n \sin\frac{A}{2} \Rightarrow n = \frac{\sin i_m}{\sin\frac{A}{2}}$$

$$D_m = 2i_m - A \Rightarrow i_m = \frac{D_m + A}{2}$$

$$\Rightarrow n = \frac{\sin\left(\frac{D_m + A}{2}\right)}{\sin\left(\frac{A}{2}\right)} \qquad (17)$$

4-2 Variation de D avec A, à i_1 et n constants

$$D = i_1 + i_2 - A$$

$$\frac{dD}{dA} = \frac{di_1}{dA} + \frac{di_2}{dA} - 1$$

i_1 étant fixe, on a : $\frac{di_1}{dA} = 0$

$$\sin r_1 = \frac{\sin i_1}{n} \Rightarrow r_1 \text{ est aussi fixe} \Rightarrow dr_1 = 0$$

$$r_2 = A - r_1 \Rightarrow r_2 \text{ variable}$$

$$\sin i_2 = n \sin r_2 \Rightarrow i_2 \text{ variable}$$

$$\cos i_2 di_2 = n \cos r_2 dr_2$$

$$\frac{di_2}{dr_2} = n \frac{\cos r_2}{\cos i_2}$$

$$r_1 + r_2 = A \Rightarrow dr_1 + dr_2 = dr_2 = dA$$

$$\Rightarrow \frac{di_2}{dr_2} = \frac{di_2}{dA} = n \frac{\cos r_2}{\cos i_2}$$

$$\Rightarrow \frac{dD}{dA} = n \frac{\cos r_2}{\cos i_2} - 1 = \frac{n \cos r_2 - \cos i_2}{\cos i_2} \qquad (18)$$

$$\left.\begin{array}{l} \sin i_2 = n \sin r_2 \\ n > 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \sin i_2 > \sin r_2 \Rightarrow i_2 > r_2$$

$$\Rightarrow \cos i_2 < \cos r_2 \Rightarrow \frac{\cos r_2}{\cos i_2} > 1$$

$$\left.\begin{array}{l} n > 1 \\ \dfrac{\cos r_2}{\cos i_2} > 1 \end{array}\right\} \Rightarrow n \frac{\cos r_2}{\cos i_2} > 1 \Rightarrow \boxed{\frac{dD}{dA} > 0}$$

$\Rightarrow$ la déviation D croît avec l'angle A du prisme.

4-3 Variation de D avec n, à A et i_1 constants

On fixe i_1 et A, et on fait varier n.

$$\sin r_1 = \frac{\sin i_1}{n} \Rightarrow r_1 \text{ varie}$$

$$r_2 = A - r_1 \Rightarrow r_2 \text{ varie}$$

$$\sin i_2 = n \sin r_2 \Rightarrow i_2 \text{ varie}$$

$$D = i_1 + i_2 - A \Rightarrow \frac{dD}{dn} = \frac{di_2}{dn}$$

$$\sin i_1 = n \sin r_1 \Rightarrow 0 = dn \sin r_1 + n \cos r_1 dr_1 \qquad \text{(a)}$$

$$\sin i_2 = n \sin r_2 \Rightarrow \cos i_2 di_2 = dn \sin r_2 + n \cos r_2 dr_2 \qquad \text{(b)}$$

$$r_1 + r_2 = A \Rightarrow dr_1 + dr_2 = 0 \Rightarrow dr_2 = -dr_1 \qquad \text{(c)}$$

$$\text{(b)} \Rightarrow \cos i_2 \frac{di_2}{dn} = \sin r_2 + n \cos r_2 \frac{dr_2}{dn} \qquad \text{(b')}$$

$$\text{(a)} \Rightarrow dn \sin r_1 = -n \cos r_1 dr_1$$

$$\Rightarrow -\frac{dr_1}{dn} = \frac{\sin r_1}{n \cos r_1}$$

$$\Rightarrow \frac{dr_2}{dn} = \frac{\sin r_1}{n \cos r_1} \text{ (d'après (c))}$$

$$\text{(b')} \Rightarrow \cos i_2 \frac{di_2}{dn} = \sin r_2 + n \cos r_2 \frac{\sin r_1}{n \cos r_1}$$

$$\Rightarrow \frac{di_2}{dn} = \frac{\sin r_2 + \cos r_2 \dfrac{\sin r_1}{\cos r_1}}{\cos i_2}$$

$$\Rightarrow \frac{di_2}{dn} = \frac{\sin r_2 \cos r_1 + \cos r_2 \sin r_1}{\cos r_1 \cos i_2} = \frac{\sin(r_1 + r_2)}{\cos r_1 \cos i_2}$$

$$\Rightarrow \frac{dD}{dn} = \frac{di_2}{dn} = \frac{\sin A}{\cos r_1 \cos i_2} \qquad (19)$$

$\frac{dD}{dn} > 0 \Rightarrow$ la déviation D augmente avec l'indice n.

Application : la dispersion du prisme

Calculons la dispersion du prisme, $\frac{dD}{d\lambda}$, à partir de la formule de Cauchy : $n = a + \frac{b}{\lambda^2}$,

où a et b sont deux constantes positives, et λ la longueur d'onde du rayon lumineux traversant le prisme.

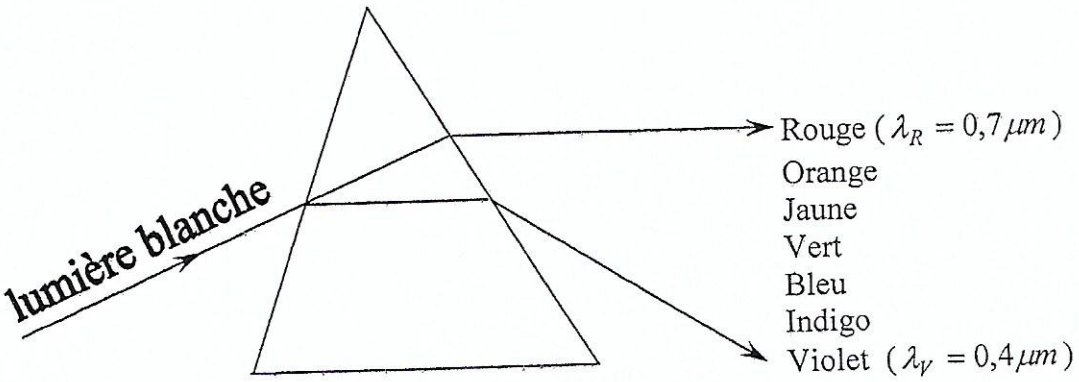
$$\frac{dD}{d\lambda} = \frac{dD}{dn} \cdot \frac{dn}{d\lambda}$$

$$\frac{dD}{dn} = \frac{\sin A}{\cos r_1 \cos i_2}$$

$$\frac{dn}{d\lambda} = -\frac{2\lambda b}{\lambda^4} = -\frac{2b}{\lambda^3}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dD}{d\lambda} = -\frac{\sin A}{\cos r_1 \cos i_2} \cdot \frac{2b}{\lambda^3}} \qquad (20)$$

$\frac{dD}{d\lambda} < 0 \Rightarrow$ la déviation D augmente lorsque la longueur d'onde λ diminue.



V - Prisme de petit angle

A petit $\Rightarrow r_1$ et r_2 petits (car $A = r_1 + r_2$)

$\Rightarrow i_1$ et i_2 petits (car $\sin i_1 = n \sin r_1$ et $\sin i_2 = n \sin r_2$)

Les formules du prisme s'écrivent alors:

$$\boxed{i_1 = n r_1} \qquad (21)$$

$$\boxed{i_2 = n r_2} \qquad (22)$$

$$\boxed{A = r_1 + r_2} \qquad (23)$$

$$D = n r_1 + n r_2 - A = n(r_1 + r_2) - A = nA - A = (n-1)A$$

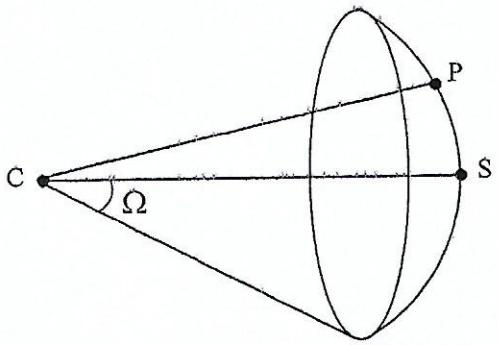
$$\boxed{D = (n-1)A} \qquad (24)$$

CHAPITRE 6 : MIROIR ET DIOPTRE SPHERIQUES

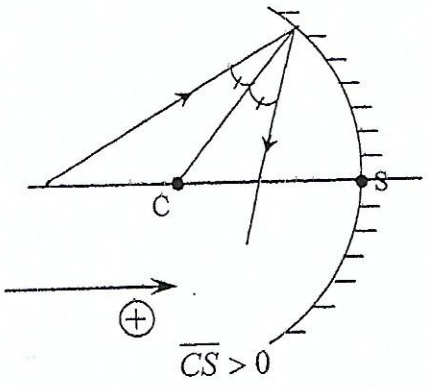
A - MIROIR SPHERIQUE

I - Définitions

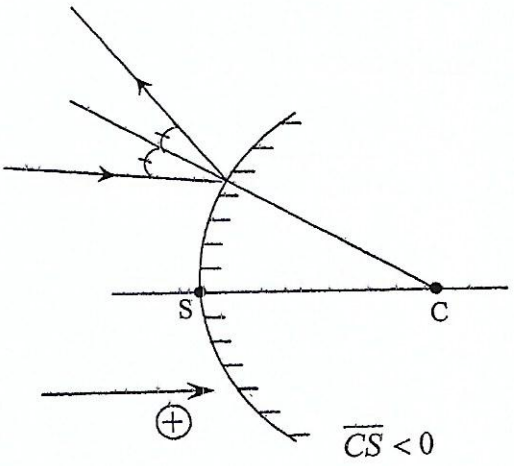
Un miroir sphérique est une portion de sphère réfléchissante, généralement en forme de calotte sphérique.



Ω = angle d'ouverture du miroir
C = centre du miroir
S = sommet du miroir
CS= rayon du miroir
axe (CS) = axe principal
axe (CP) = axe secondaire



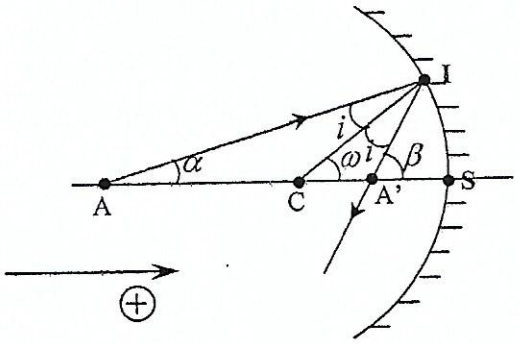
miroir concave



miroir convexe

II - Stigmatisme rigoureux

Le stigmatisme rigoureux est réalisé pour le centre du miroir, ainsi que pour tout point de la surface du miroir.
Etudions le cas des autres points.



A' est l'image de A.
Dans CIA : $\alpha + i + (\pi - \omega) = \pi \Rightarrow \alpha = \omega - i$
Dans CIA' : $\omega + i + (\pi - \beta) = \pi \Rightarrow \beta = \omega + i$

Dans le triangle CIA :

$$\frac{CA}{\sin i} = \frac{CI}{\sin \alpha} \Rightarrow CA = CI\frac{\sin i}{\sin \alpha} = CS\frac{\sin i}{\sin(\omega - i)}$$

$$-\overline{CA} = \overline{CS}.\frac{\sin i}{\sin(\omega - i)}$$

$$\frac{1}{\overline{CA}} = -\frac{1}{\overline{CS}}\frac{\sin(\omega - i)}{\sin i}$$

Dans le triangle CIA' :

$$\frac{CA'}{\sin i} = \frac{CI}{\sin(\pi - \beta)} = \frac{CI}{\sin \beta} \Rightarrow CA' = CI\frac{\sin i}{\sin \beta} = CS\frac{\sin i}{\sin(\omega + i)}$$

$$\overline{CA'} = \overline{CS}.\frac{\sin i}{\sin(\omega + i)}$$

$$\frac{1}{\overline{CA'}} = \frac{1}{\overline{CS}}\frac{\sin(\omega + i)}{\sin i}$$

$$\frac{1}{\overline{CA}} + \frac{1}{\overline{CA'}} = \frac{1}{\overline{CS}}\frac{\sin(\omega + i) - \sin(\omega - i)}{\sin i}$$

$$\frac{1}{\overline{CA}} + \frac{1}{\overline{CA'}} = \frac{1}{\overline{CS}}\frac{\sin\omega\cos i + \cos\omega\sin i - \sin\omega\cos i + \cos\omega\sin i}{\sin i}$$

$$\frac{1}{\overline{CA}} + \frac{1}{\overline{CA'}} = \frac{1}{\overline{CS}}\frac{2\cos\omega\sin i}{\sin i}$$

$$\boxed{\frac{1}{\overline{CA}}+\frac{1}{\overline{CA'}}=\frac{2\cos\omega}{\overline{CS}}} \qquad (1)$$

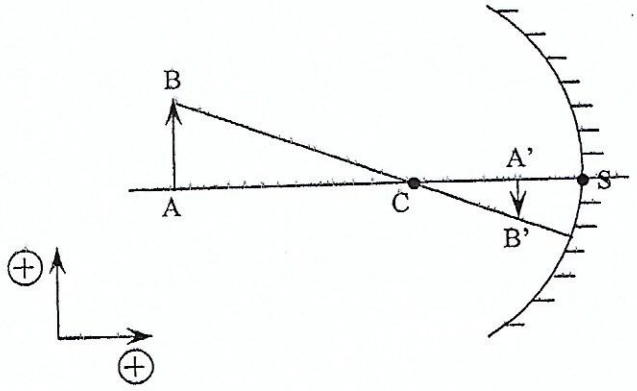
La position de l'image A' n'est pas fixe : elle dépend de ω. Le miroir sphérique n'est donc pas rigoureusement stigmatique pour un point quelconque.

III - Stigmatisme approché

Les rayons considérés ici sont paraxiaux, c'est-à-dire ω est faible.

3-1 Relations de conjugaison avec origine au centre

Les relations de conjugaison sont les formules permettant de connaître la position et la grandeur d'une image A'B' lorsque l'on connaît la position et la grandeur de l'objet AB.



ω faible $\Rightarrow \cos\omega \approx 1$

$$(1) \Rightarrow \boxed{\frac{1}{\overline{CA}}+\frac{1}{\overline{CA'}}=\frac{2}{\overline{CS}}} \qquad (2)$$

Le grandissement transversal (ou linéaire) du miroir sphérique est $\gamma=\dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$. Les triangles CAB et $CA'B'$ étant semblables, on a :

$$\boxed{\gamma=\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{CA'}}{\overline{CA}}} \qquad (3)$$

3-2 Relation de conjugaison avec origine au sommet

$$(2) \Rightarrow \frac{1}{\overline{CS}+\overline{SA}}+\frac{1}{\overline{CS}+\overline{SA'}}=\frac{2}{\overline{CS}}$$

$$\frac{\overline{CS}+\overline{SA'}+\overline{CS}+\overline{SA}}{\left(\overline{CS}+\overline{SA}\right)\left(\overline{CS}+\overline{SA'}\right)}=\frac{2}{\overline{CS}}$$

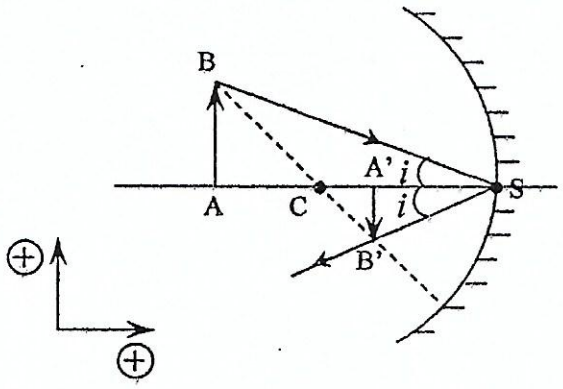
$$\overline{CS}\left(\overline{SA'}+\overline{SA}+2\overline{CS}\right)=2\left(\overline{CS}+\overline{SA}\right)\left(\overline{CS}+\overline{SA'}\right)$$

$$\overline{CS}.\overline{SA'}+\overline{CS}.\overline{SA}+2\overline{CS}^2=2\overline{CS}^2+2\overline{CS}.\overline{SA'}+2\overline{SA}.\overline{CS}+2\overline{SA}.\overline{SA'}$$

$$-\overline{CS}.\overline{SA'}-\overline{CS}.\overline{SA}=2\overline{SA}.\overline{SA'}$$

$$\frac{\overline{SC}.\overline{SA'}+\overline{SC}.\overline{SA}}{\overline{SC}.\overline{SA}.\overline{SA'}}=\frac{2\overline{SA}.\overline{SA'}}{\overline{SC}.\overline{SA}.\overline{SA'}}$$

$$\boxed{\frac{1}{\overline{SA}}+\frac{1}{\overline{SA'}}=\frac{2}{\overline{SC}}} \qquad (4)$$



$$\tan i=\frac{AB}{SA}=\frac{A'B'}{SA'}$$

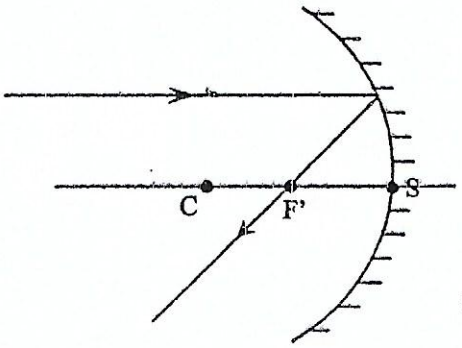
Donc : $\frac{A'B'}{AB}=\frac{SA'}{SA}$, soit : $\frac{-\overline{A'B'}}{\overline{AB}}=\frac{-\overline{SA'}}{-\overline{SA}}$

$$\boxed{\Rightarrow \gamma=\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}=-\frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}}} \qquad (5)$$

3-3 Foyers - Formules de Newton

3-3-1 Foyer principal image F'

Soit un point objet A à l'infini sur l'axe. Ce point envoie sur le miroir un rayon incident parallèle à l'axe. Celui-ci se réfléchit en passant par le foyer principal image *F'* du miroir.



$\overline{SA} \to \infty$

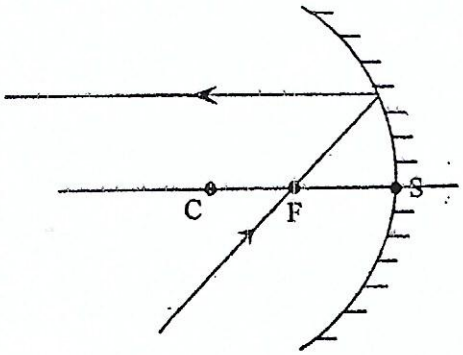
$\overline{SA'} = \overline{SF'}$

$$(4) \Rightarrow \frac{1}{\overline{SF'}} = \frac{2}{\overline{SC}}$$

$$\boxed{\overline{SF'} = \frac{\overline{SC}}{2}} \qquad (6)$$

3-3-2 Foyer principal objet F

Un rayon incident passant par le foyer principal objet F du miroir sera réfléchi parallèlement à l'axe.



$\overline{SA} = \overline{SF}$

$\overline{SA'} \to \infty$

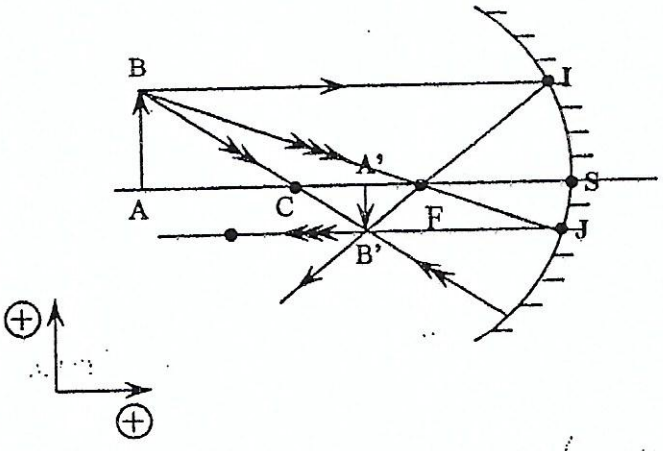
$$(4) \Rightarrow \frac{1}{\overline{SF}} = \frac{2}{\overline{SC}}$$

$$\boxed{\overline{SF} = \frac{\overline{SC}}{2}} \qquad (7)$$

$$\overline{SF} = \overline{SF'} = \frac{\overline{SC}}{2} \Rightarrow \boxed{F = F'}$$

Un miroir sphérique ne possède qu'un seul foyer.

3-3-3 Formules de Newton



Les triangles *FAB* et *FSJ* sont semblables. Donc :

$$\frac{\overline{SJ}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{FS}}{\overline{FA}}$$

Il en est de même des triangles *FA'B'* et *FSI*. Donc :

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{SI}} = \frac{\overline{FA'}}{\overline{FS}}$$

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{SJ}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{FS}}{\overline{FA}}$$

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{SI}} = \frac{\overline{FA'}}{\overline{FS}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{FS}}{\overline{FA}} = \frac{\overline{FA'}}{\overline{FS}} \quad et \quad \overline{FA}.\overline{FA'} = \overline{FS}^2} \qquad (8)$$

(Formules de Newton)

3-4 Plans principaux, points principaux, distances focales

Les plans principaux sont deux plans de front conjugués pour lesquels le grandissement transversal $\gamma = +1$.

Les points principaux sont les intersections H et H' de ces plans avec l'axe principal.

(3) $\Rightarrow \gamma = \frac{\overline{CH'}}{\overline{CH}} = +1$

$\Rightarrow \overline{CH'} = \overline{CH}$

$\Rightarrow H = H'$

(2) $\Rightarrow \frac{1}{\overline{CH}} + \frac{1}{\overline{CH'}} = \frac{2}{\overline{CS}}$

$\Rightarrow \frac{2}{\overline{CH}} = \frac{2}{\overline{CS}}$

$\Rightarrow \overline{CH} = \overline{CS}$

$\Rightarrow H = S$

Donc : $\boxed{H = H' = S}$

Les points principaux sont confondus avec le sommet du miroir. Les plans principaux sont confondus avec le plan tangent au miroir en son sommet.

La distance focale objet : $f = \overline{HF} = \overline{SF} = \frac{\overline{SC}}{2}$

La distance focale image : $f' = \overline{H'F'} = \overline{SF'} = \frac{\overline{SC}}{2}$

$$\Rightarrow \boxed{f = f' = \frac{\overline{SC}}{2}} \qquad (9)$$

Les relations (2) et (4) s'écrivent alors :

$$\frac{1}{\overline{CA}}+\frac{1}{\overline{CA'}}=-\frac{1}{f} \qquad (2')$$

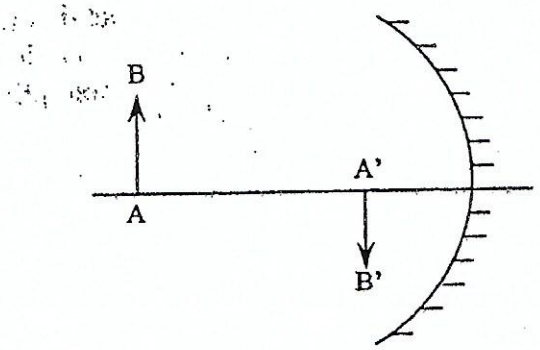
$$\frac{1}{\overline{SA}}+\frac{1}{\overline{SA'}}=\frac{1}{f} \qquad (4')$$

Les formules de Newton s'écrivent :

$$\gamma=-\frac{f}{\overline{FA}}=-\frac{\overline{FA'}}{f'}$$

$$\overline{FA}.\overline{FA'}=f.f'=f^2=f'^2 \qquad (8')$$

3-5 Grandissement axial



Si A se déplace d'une distance élémentaire dx, A' se déplace d'une distance élémentaire dx'. Le grandissement axial du miroir sphérique est :

$$g=\frac{dx'}{dx}$$

Posons : $\overline{FA}=x$ et $\overline{FA'}=x'$

$$x.x'=f^2 \Rightarrow d(x.x')=x'.dx+x.dx'=0 \Rightarrow \frac{dx'}{dx}=\frac{-x'}{x}$$

$$g = \frac{dx'}{dx} = -\frac{x'}{x} = -\frac{f^2}{x^2} = -\left(\frac{f}{x}\right)^2$$

Or $\gamma = -\frac{f}{\overline{FA}} = -\frac{f}{x}$

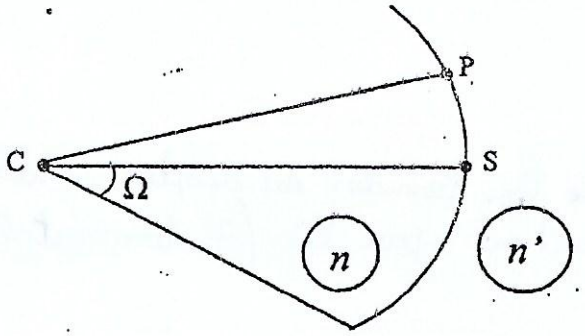
$$\Rightarrow g = \frac{dx'}{dx} = -\left(\frac{f}{x}\right)^2 = -\gamma^2 \qquad (10)$$

$g < 0 \Rightarrow$ Image et objet se déplacent en sens inverse.

B - DIOPTRE SPHERIQUE

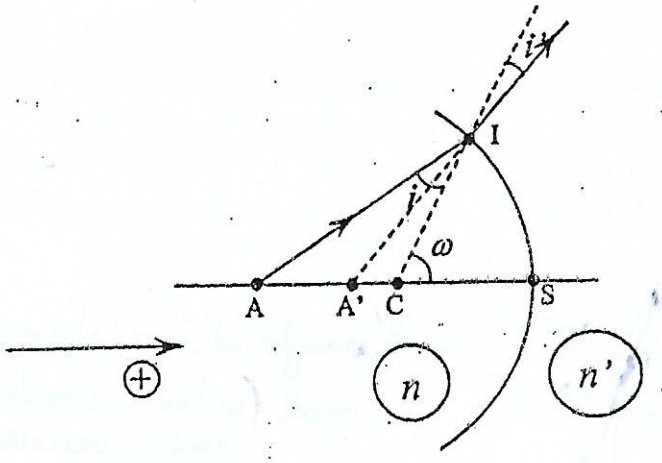
I - Définitions

Un dioptre sphérique est une surface sphérique (généralement en forme de calotte sphérique) séparant deux milieux transparents homogènes et isotropes d'indices différents.



Ω = ouverture du dioptre
C = centre du dioptre
S = sommet du dioptre
CS = rayon du dioptre
axe (CS) =axe principal
axe (CP) =axe secondaire

II - Invariant fondamental du dioptre



(Cas où $n' > n$)

Dans le triangle *CIA* :

$$\frac{CA}{\sin i} = \frac{IA}{\sin(\pi - \omega)} = \frac{IA}{\sin \omega} \Rightarrow CA = IA.\frac{\sin i}{\sin \omega}$$

Dans le triangle *CIA'* :

$$\frac{CA'}{\sin i'} = \frac{IA'}{\sin(\pi - \omega)} = \frac{IA'}{\sin \omega} \Rightarrow CA' = IA'.\frac{\sin i'}{\sin \omega}$$

$$\frac{CA}{CA'} = \frac{IA}{IA'}.\frac{\sin i}{\sin i'}$$

$$\frac{CA}{CA'} = \frac{-\overline{CA}}{-\overline{CA'}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{CA'}} \text{ et } n \sin i = n' \sin i'$$

$$\Rightarrow \frac{\overline{CA}}{\overline{CA'}} = \frac{IA}{IA'}.\frac{n'}{n}$$

(11) $$\boxed{\frac{n.\overline{CA}}{IA} = \frac{n'\overline{CA'}}{IA'}}$$ (Invariant fondamental du dioptre sphérique)

III - Stigmatisme rigoureux

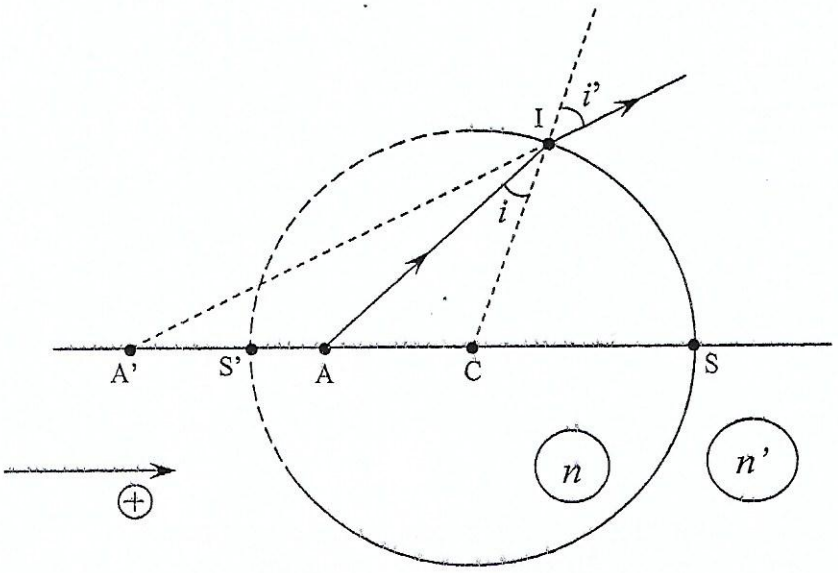
Le stigmatisme rigoureux est réalisé pour tous les points du dioptre, ainsi que pour le centre C.

Les autres points stigmatiques éventuels doivent satisfaire à la relation (11) quel que soit I. A et A' étant alors fixes, on doit avoir :

$$\frac{IA'}{IA} = \frac{n'}{n}.\frac{\overline{CA'}}{\overline{CA}} = cte$$

Donc le lieu de I est une sphère dont le centre est sur la droite *(AA')* et dont le diamètre divise harmoniquement le segment *[AA']*.

Inversement, étant donné une sphère, il existe sur chaque diamètre *SCS'* un couple de points partageant *[SS']* dans un rapport donné : il existe donc sur ce diamètre un couple de points *(A,A')* pour lequel le stigmatisme rigoureux du dioptre est réalisé.



En plaçant successivement I en S et S', on a :

$$\frac{SA'}{SA} = \frac{S'A'}{S'A} = \frac{n'}{n} \cdot \frac{\overline{CA'}}{\overline{CA}},$$

soit : $$\frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}} = -\frac{\overline{S'A'}}{\overline{S'A}} = \frac{n'}{n} \cdot \frac{\overline{CA'}}{\overline{CA}} \qquad (E)$$

$$(E) \Rightarrow \frac{\overline{SA'} - \overline{S'A'}}{\overline{SA} + \overline{S'A}} = \frac{n'}{n} \frac{\overline{CA'}}{\overline{CA}}$$

$$\frac{\overline{SC} + \overline{CA'} - \overline{S'C} - \overline{CA'}}{\overline{SC} + \overline{CA} + \overline{S'C} + \overline{CA}} = \frac{n'}{n} \frac{\overline{CA'}}{\overline{CA}}$$

$$\frac{-2\overline{CS}}{2\overline{CA}} = \frac{n'}{n} \frac{\overline{CA'}}{\overline{CA}}$$

$$-\overline{CS} = \frac{n'}{n} \overline{CA'}$$

$$\boxed{\overline{CA'} = -\frac{n}{n'} \overline{CS}} \qquad (12)$$

$$(E) \Rightarrow \frac{\overline{SA'} + \overline{S'A'}}{\overline{SA} - \overline{S'A}} = \frac{n'}{n} \frac{\overline{CA'}}{\overline{CA}}$$

$$\frac{\overline{SC}+\overline{CA'}+\overline{S'C}+\overline{CA'}}{\overline{SC}+\overline{CA}-\overline{S'C}-\overline{CA}}=\frac{n'}{n}\frac{\overline{CA'}}{\overline{CA}}$$

$$-\frac{2\overline{CA'}}{2\overline{CS}}=\frac{n'}{n}\frac{\overline{CA'}}{\overline{CA}}$$

$$-\frac{1}{\overline{CS}}=\frac{n'}{n}.\frac{1}{\overline{CA}}$$

$$\boxed{\overline{CA}=-\frac{n'}{n}\overline{CS}} \qquad (13)$$

Ces deux points A et A' pour lesquels le stigmatisme est rigoureux sont appelés points de Weierstrass (ou points de Young). Ils sont toujours de natures opposées : l'un est réel, l'autre est virtuel.
Sur chaque diamètre du dioptre il existe un couple de tels points.

IV - Stigmatisme approché

Le stigmatisme approché est réalisé au voisinage des positions de stigmatisme rigoureux. En effet, lorsque le point objet A est très proche du centre C (respectivement du point de Weierstrass W), le point image A' a une position fixe indépendante de I et proche de C (respectivement de W').
Lorsque le point objet a une position quelconque, le stigmatisme approché est réalisé dans le cas des rayons paraxiaux, c'est-à-dire lorsque I est proche de S.

4-1 Relations de conjugaison

I et S étant pratiquement confondus, l'invariant fondamental du dioptre sphérique devient :

$$\frac{n.\overline{CA}}{\overline{SA}}=\frac{n'.\overline{CA'}}{\overline{SA'}} \qquad (E')$$

$$\frac{n\left(\overline{CS}+\overline{SA}\right)}{\overline{SA}}=\frac{n'\left(\overline{CS}+\overline{SA'}\right)}{\overline{SA'}}$$

$$n\left(1+\frac{\overline{CS}}{\overline{SA}}\right)=n'\left(1+\frac{\overline{CS}}{\overline{SA'}}\right)$$

$$n+n\frac{\overline{CS}}{\overline{SA}}=n'+n'\frac{\overline{CS}}{\overline{SA'}}$$

$$\overline{CS}\left(\frac{n}{\overline{SA}}-\frac{n'}{\overline{SA'}}\right)=n'-n$$

$$\frac{n}{\overline{SA}} - \frac{n'}{\overline{SA'}} = \frac{n'-n}{\overline{CS}}$$

(14) $\boxed{\dfrac{n}{\overline{SA}} - \dfrac{n'}{\overline{SA'}} = \dfrac{n-n'}{\overline{SC}}}$ (Formule de Descartes)

* Si $\overline{SC} \to \infty$, on retrouve la formule du dioptre plan :

$$\frac{n}{\overline{SA}} = \frac{n'}{\overline{SA'}}$$

* Si $n = -n'$, on retrouve la formule du miroir sphérique :

$$\frac{1}{\overline{SA}} + \frac{1}{\overline{SA'}} = \frac{2}{\overline{SC}}$$

Etablissons la relation de conjugaison avec origine au centre :

(E') $\Rightarrow \dfrac{n\overline{CA}}{\overline{SC}+\overline{CA}} = \dfrac{n'\overline{CA'}}{\overline{SC}+\overline{CA'}}$

$$n'\overline{CA'}\left(\overline{SC}+\overline{CA}\right) = n\overline{CA}\left(\overline{SC}+\overline{CA'}\right)$$

$$n'\overline{CA'}.\overline{SC} + n'\overline{CA'}.\overline{CA} = n\overline{CA}.\overline{SC} + n\overline{CA}.\overline{CA'}$$

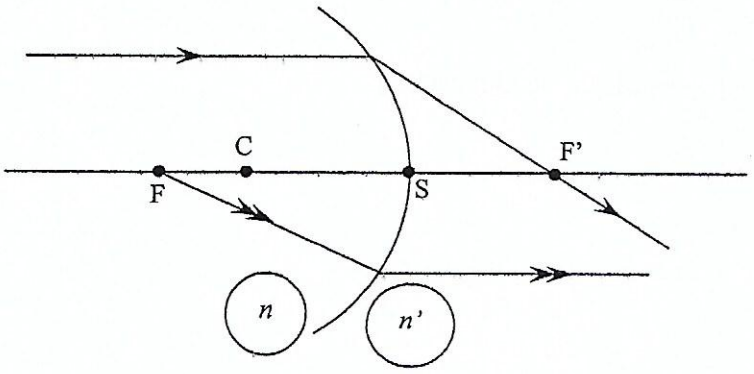
$$-n\overline{CA}.\overline{SC} + n'\overline{CA'}.\overline{SC} = \left(n-n'\right)\overline{CA}.\overline{CA'}$$

$$\frac{n\overline{CA}.\overline{CS} - n'\overline{CA'}.\overline{CS}}{\overline{CA}.\overline{CA'}.\overline{CS}} = \frac{(n-n')\,\overline{CA}.\overline{CA'}}{\overline{CA}.\overline{CA'}.\overline{CS}}$$

$$\boxed{\frac{n}{\overline{CA'}} - \frac{n'}{\overline{CA}} = \frac{n-n'}{\overline{CS}}} \qquad (15)$$

4-2 Foyers – Convergence

4-2-1 Foyer image F'



$$\overline{SA} \to \infty$$

$$\overline{SA'} = \overline{SF'}$$

$$(14) \Rightarrow -\frac{n'}{\overline{SF'}} = \frac{n-n'}{\overline{SC}}$$

$$\overline{SF'} = -\frac{n'.\overline{SC}}{n-n'}$$

$$\boxed{\overline{SF'} = \frac{n'}{n'-n}\overline{SC}} \qquad (16)$$

4-2-2 Foyer objet F

$$\overline{SA} = \overline{SF}$$

$$\overline{SA'} \to \infty$$

$$(14) \Rightarrow \frac{n}{\overline{SF}} = \frac{n-n'}{\overline{SC}}$$

$$\boxed{\overline{SF} = \frac{n}{n-n'}\overline{SC}} \qquad (17)$$

4-2-3 Remarques

a) Les relations (16) et (17) montrent que F et F' sont toujours de part et d'autre de S. Donc les foyers sont tous les deux réels ou tous les deux virtuels.

b) $\overline{SF} + \overline{SF'} = \frac{n}{n-n'}\overline{SC} + \frac{n'}{n'-n}\overline{SC}$

$$\overline{SF} + \overline{SF'} = \left(\frac{n}{n-n'} - \frac{n'}{n-n'}\right)\overline{SC}$$

$$\overline{SF} + \overline{SF'} = \left(\frac{n-n'}{n-n'}\right)\overline{SC}$$

$$\boxed{\overline{SF} + \overline{SF'} = \overline{SC}} \qquad (18)$$

$(18) \Rightarrow \overline{SC} + \overline{CF} + \overline{SF'} = \overline{SC}$

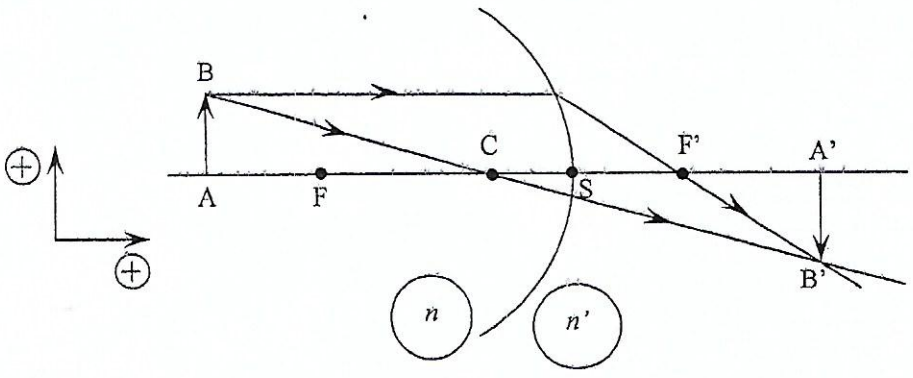
$$\overline{CF} + \overline{SF'} = 0$$

$$\overline{CF} = -\overline{SF'}$$

$$\boxed{\overline{CF} = \overline{F'S}} \qquad (19)$$

La relation (19) montre que les deux foyers F et F' sont situés à l'extérieur du segment *[CS]* et symétriques par rapport au milieu de ce segment.

c)



$$\boxed{\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{CA'}}{\overline{CA}}} \qquad (20)$$

$$\gamma = \frac{\overline{CH'}}{\overline{CH}} = 1 \Rightarrow \overline{CH'} = \overline{CH} \Rightarrow H = H'$$

$$(15) \Rightarrow \frac{n}{\overline{CH'}} - \frac{n'}{\overline{CH}} = \frac{n-n'}{\overline{CS}}$$

$$\Rightarrow \frac{n}{\overline{CH}} - \frac{n'}{\overline{CH}} = \frac{n-n'}{\overline{CS}}$$

$$\Rightarrow \frac{n-n'}{\overline{CH}} = \frac{n-n'}{\overline{CS}}$$

$$\Rightarrow \overline{CH} = \overline{CS}$$

$$\Rightarrow H = S$$

Donc : $\boxed{H = H' = S}$

$$\boxed{f = \overline{HF} = \overline{SF} = \frac{n}{n-n'}\overline{SC} \qquad (21a)}$$

$$\boxed{f' = \overline{H'F'} = \overline{SF'} = \frac{n'}{n'-n}\overline{SC} \qquad (21b)}$$

$(18) \Rightarrow f + f' = \pm R$, où $R = SC$= rayon du dioptre

$$\frac{f}{f'} = \left(\frac{n\overline{SC}}{n-n'}\right)\left(\frac{n'-n}{n'\overline{SC}}\right) = -\frac{n\overline{SC}}{n'\overline{SC}}\left(\frac{n-n'}{n-n'}\right)$$

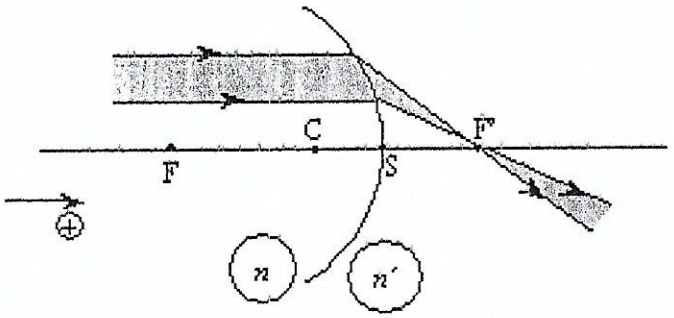
$$\boxed{\frac{f}{f'} = -\frac{n}{n'} \qquad (22)}$$

4-2-4 Convergence

$$f' = \overline{SF'} = \frac{n'}{n'-n}\overline{SC}$$

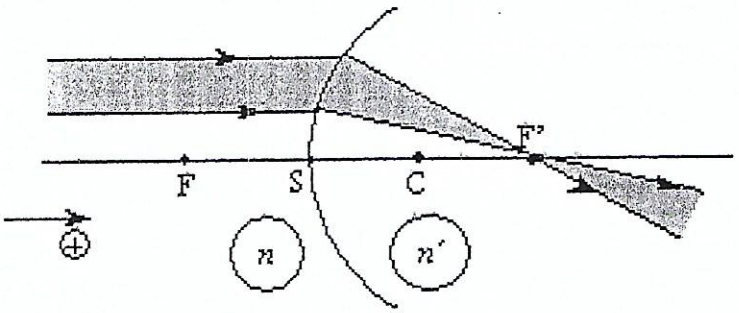
a) Foyers réels : $f' > 0$

- Si $n > n' \Rightarrow \frac{n'}{n'-n} < 0 \Rightarrow \overline{SC} < 0$



Dioptre convergent

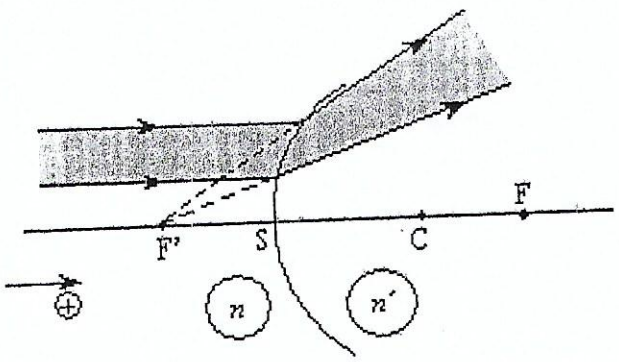
- Si $n < n' \Rightarrow \frac{n'}{n'-n} > 0 \Rightarrow \overline{SC} > 0$



Dioptre convergent

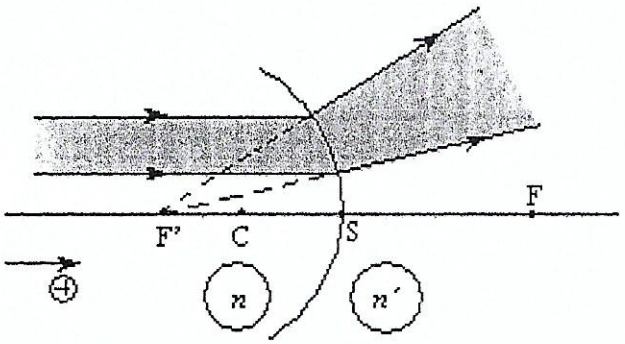
b) Foyers virtuels : f ' < 0

- Si $n > n' \Rightarrow \frac{n'}{n'-n} < 0 \Rightarrow \overline{SC} > 0$



Dioptre divergent

- Si $n < n' \Rightarrow \dfrac{n'}{n'-n} > 0 \Rightarrow \overline{SC} < 0$

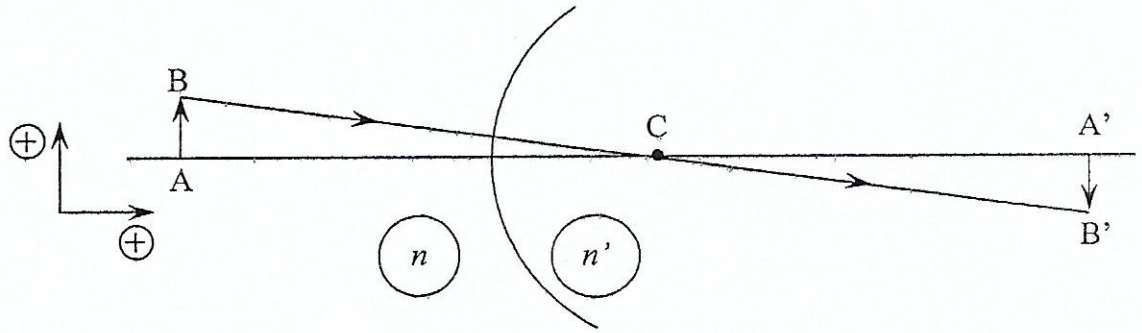


Dioptre divergent

L'examen des figures ci-dessus montre que le centre d'un dioptre convergent est situé dans le milieu d'indice le plus élevé, et que celui d'un dioptre divergent est situé dans le milieu le moins réfringent.

4-3 Grandissement transversal – Formule de Newton

4-3-1 Origine au centre



$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{CA'}}{\overline{CA}} \qquad (23)$$

4-3-2 Origine au sommet

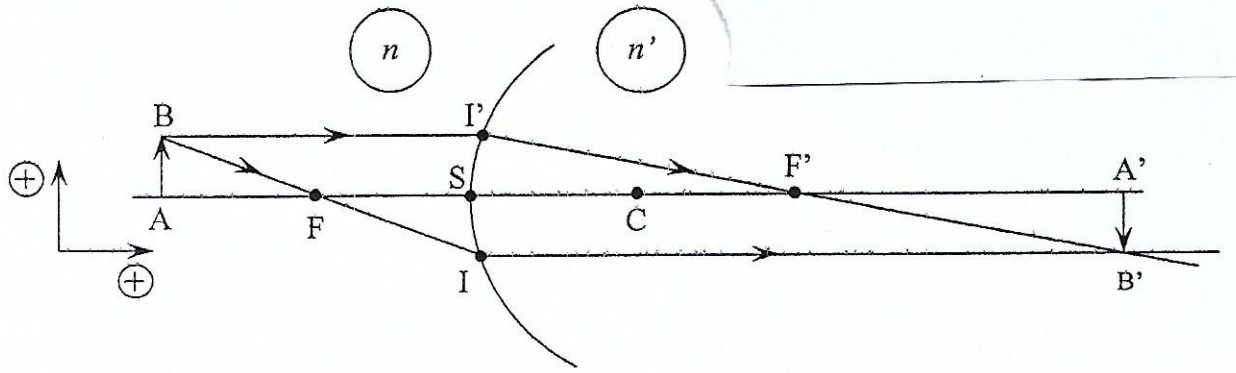
Dans les conditions de Gauss, l'invariant fondamental du dioptre sphérique s'écrit :

$$\frac{n\overline{CA}}{\overline{SA}} = \frac{n'\overline{CA'}}{\overline{SA'}}$$

$$\Rightarrow \gamma = \frac{\overline{CA'}}{\overline{CA}} = \left(\frac{n}{\overline{SA}}\right)\left(\frac{\overline{SA'}}{n'}\right)$$

$$\gamma = \frac{n}{n'}\frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}} \qquad (24)$$

4-3-3 Origines aux foyers – Formule de Newton



$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{SI}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{FS}}{\overline{FA}}$$

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{SI'}} = \frac{\overline{F'A'}}{\overline{F'S}}$$

$$\Rightarrow \gamma = \frac{\overline{FS}}{\overline{FA}} = \frac{\overline{F'A'}}{\overline{F'S}} \qquad (25)$$

$$\gamma = -\frac{\overline{SF}}{\overline{FA}} = -\frac{\overline{F'A'}}{\overline{SF'}}$$

$$\gamma = -\frac{f}{\overline{FA}} = -\frac{\overline{F'A'}}{f'} \qquad (26)$$

$$\Rightarrow \overline{FA}.\overline{F'A'} = f.f' \qquad (27)$$

(Formule de Newton)

4-4 Grandissement axial

Posons : $x = \overline{FA}$ et $x' = \overline{F'A'}$

$xx' = ff'$ (formule de Newton)

$\Rightarrow x'dx + xdx' = 0$

$xdx' = -x'dx$

$$\frac{dx'}{dx} = -\frac{x'}{x} = -\frac{ff'}{x^2}$$

$$g = \frac{dx'}{dx} = -\frac{ff'}{x^2}$$

Or $\gamma = -\frac{f}{x} = -\frac{x'}{f'}$

$$\Rightarrow g = -\frac{f^2}{x^2}\frac{f'}{f} = -\gamma^2\left(-\frac{n'}{n}\right) = \frac{n'}{n}\gamma^2$$

$$\boxed{\Rightarrow g = \frac{dx'}{dx} = -\frac{ff'}{x^2} = \frac{n'}{n}\gamma^2} \qquad (28)$$

$g > 0 \Rightarrow$ Image et objet se déplacent dans le même sens.

CHAPITRE 7 : SYSTEMES CENTRES DIOPTRIQUES

I - Définition

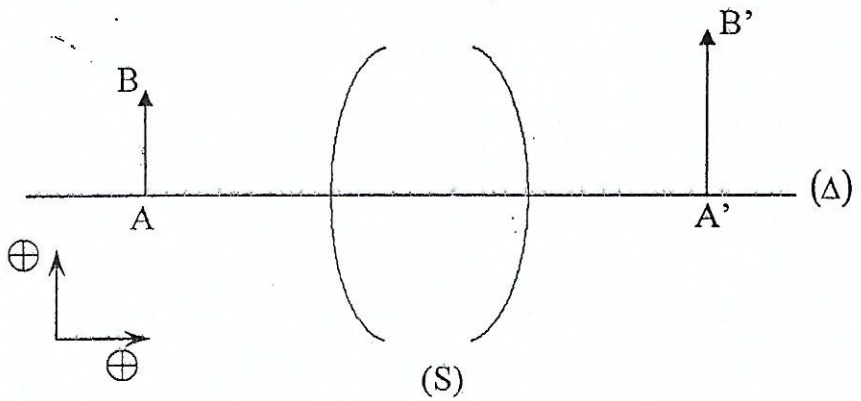
On appelle système centré un ensemble de dioptres (et de miroirs éventuellement) possédant tous le même axe de symétrie dit axe optique ou axe principal du système.

II - Conditions de l'approximation de Gauss

Le stigmatisme rigoureux ne pouvant pas être réalisé pour tous les dioptres simultanément, les systèmes centrés ne sont utilisés que dans les conditions de stigmatisme approché (ou conditions de Gauss).

III - Grandissements

3-1 Grandissement transversal

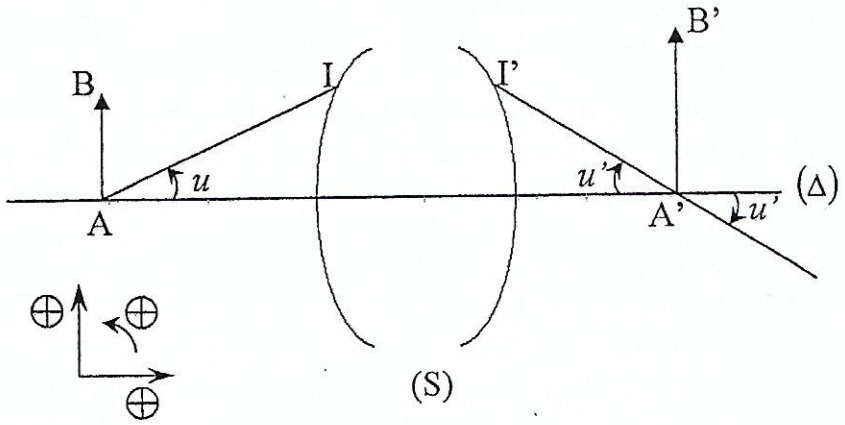


$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} \qquad (1)$$

Si $\gamma > 0$, l'image est droite ; si $\gamma < 0$, elle est renversée.

Si $|\gamma| > 1$, l'image est plus grande que l'objet ; si $|\gamma| < 1$, elle est plus petite.

3-2 Grandissement angulaire



$$G = \frac{u'}{u} \qquad (2)$$

3-3 Relation entre les grandissements transversal et angulaire

$n.\overline{AB}.\sin u = n'.\overline{A'B'}.\sin u'$ (condition d'aplanétisme)

Dans les conditions de Gauss (rayons paraxiaux) on a :

$n.\overline{AB}.u = n'.\overline{A'B'}.u'$ (Relation de Lagrange-Helmholtz)

$$\Rightarrow \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}.\frac{u'}{u} = \frac{n}{n'}$$

$$\gamma G = \frac{n}{n'} \qquad (3)$$

3-4 Grandissement axial

En prenant des origines O et O' quelconques sur l'axe principal, on peut repérer A et A' par leurs abscisses $x = \overline{OA}$ et $x' = \overline{O'A'}$. Une légère variation dx de x entraînera une légère variation dx' de x'. Le grandissement axial du système est :

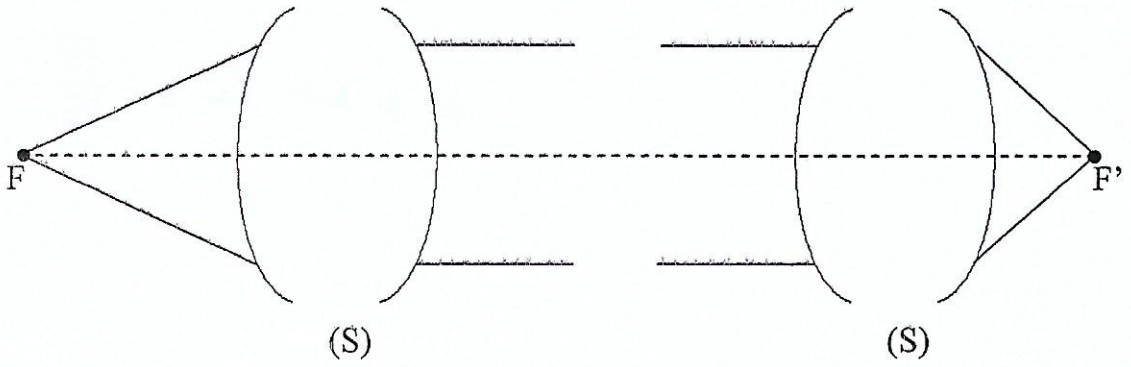
$$g = \frac{dx'}{dx} \qquad (4)$$

IV - Plans et points principaux

On appelle plans principaux le couple de plans conjugués pour lequel le grandissement transversal vaut + 1 : l'un est le plan principal objet, l'autre le plan principal image.

Les points principaux H et H' sont les intersections de ces plans principaux avec l'axe principal. On appelle interstice du système : $\overline{HH'}$.

V - Foyers principaux, plans focaux, foyers secondaires, distances focales



F = foyer principal objet du système centré (S)

F' = foyer principal image du système centré (S)

Si les foyers F et F' sont rejetés à l'infini le système est dit afocal. En vertu du principe du retour inverse de la lumière, si l'un des foyers est à l'infini, il en est de même de l'autre.

Les plans focaux objet et image sont les plans perpendiculaires à l'axe en F et F'.

Les points des plans focaux autres que F et F', notés ϕ et ϕ', sont appelés foyers secondaires objet et image.

On appelle distance focale objet $f = \overline{HF}$ et distance focale image $f' = \overline{H'F'}$.

Les points H, H', F, F' suffisent pour déterminer f et f '. La connaissance de ces quatre points permet de tout savoir sur le système. On les appelle éléments cardinaux du système (il existe d'autres éléments cardinaux).

On appelle vergence du système la quantité :

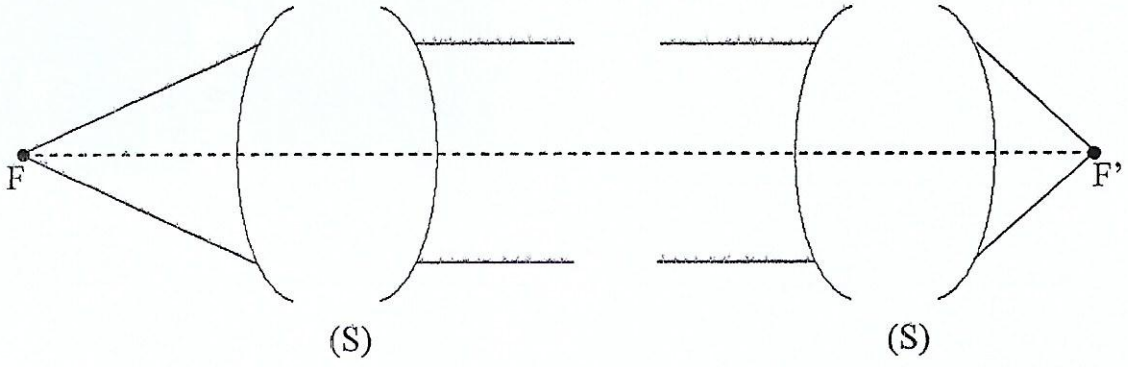
$$C = \frac{\text{indice de réfraction du milieu image}}{\text{distance focale image}}$$

IV - Plans et points principaux

On appelle plans principaux le couple de plans conjugués pour lequel le grandissement transversal vaut + 1 : l'un est le plan principal objet, l'autre le plan principal image.

Les points principaux H et H' sont les intersections de ces plans principaux avec l'axe principal. On appelle interstice du système : $\overline{HH'}$.

V - Foyers principaux, plans focaux, foyers secondaires, distances focales



F = foyer principal objet du système centré (S)

F' = foyer principal image du système centré (S)

Si les foyers F et F' sont rejetés à l'infini le système est dit afocal. En vertu du principe du retour inverse de la lumière, si l'un des foyers est à l'infini, il en est de même de l'autre.

Les plans focaux objet et image sont les plans perpendiculaires à l'axe en F et F'.

Les points des plans focaux autres que F et F', notés ϕ et ϕ', sont appelés foyers secondaires objet et image.

On appelle distance focale objet $f = \overline{HF}$ et distance focale image $f' = \overline{H'F'}$.

Les points H, H', F, F' suffisent pour déterminer f et f '. La connaissance de ces quatre points permet de tout savoir sur le système. On les appelle éléments cardinaux du système (il existe d'autres éléments cardinaux).

On appelle vergence du système la quantité :

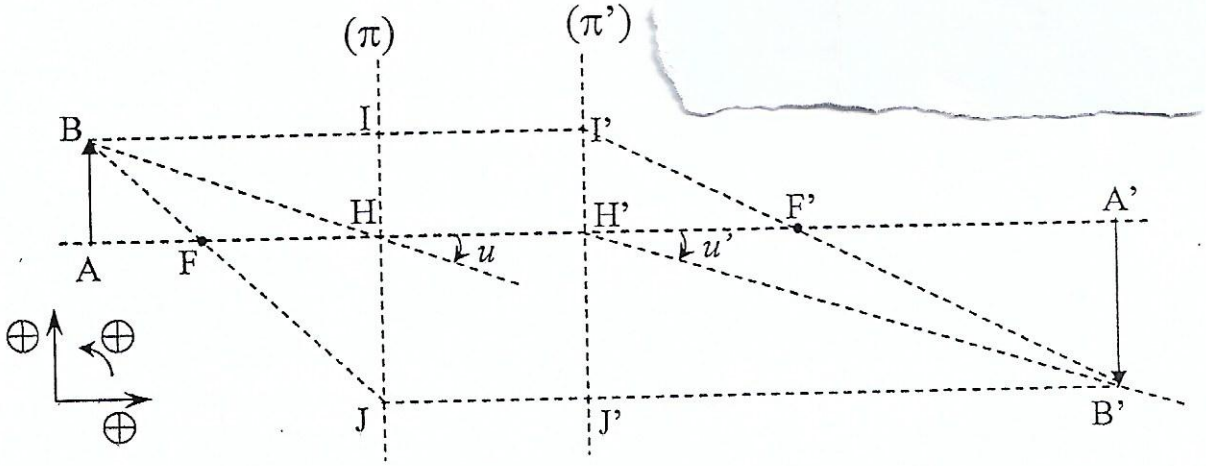
$$C = \frac{\text{indice de réfraction du milieu image}}{\text{distance focale image}}$$

$$C = \frac{n'}{f'} \qquad (5)$$

C est homogène à l'inverse d'une longueur. On l'exprime en m^{-1} ou aussi en dioptries (δ) : $1\delta = 1m^{-1}$.

VI - Relations de conjugaison

6- 1 Construction de l'image d'un objet



6-2 Relations de conjugaison

Les relations de conjugaison sont les relations qui permettent de connaître la position et la grandeur de l'image lorsque l'on connaît la position et la grandeur de l'objet.

a) Origines aux foyers :

Les origines des mesures algébriques sont prises en F pour le milieu objet et en F' pour le milieu image.

- Les triangles FAB et FHJ sont semblables : $\frac{\overline{HJ}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{FH}}{\overline{FA}}$

Or $\overline{HJ} = \overline{A'B'}$ et $\overline{FH} = -f$

$$\Rightarrow \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = -\frac{f}{\overline{FA}} \qquad (6)$$

- Les triangles F'A'B' et F'H'I' sont semblables : $\frac{\overline{A'B'}}{\overline{H'I'}} = \frac{\overline{F'A'}}{\overline{F'H'}}$

Or $\overline{H'I'} = \overline{AB}$ et $\overline{F'H'} = -f'$

$$\Rightarrow \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = -\frac{\overline{F'A'}}{f'} \qquad (7)$$

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = -\frac{f}{\overline{FA}} = -\frac{\overline{F'A'}}{f'} \qquad (8)$$

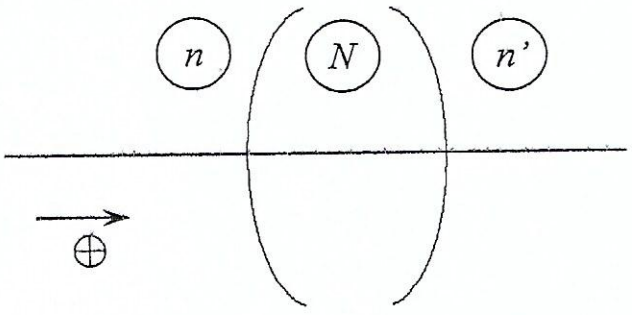
et

$$\overline{FA}.\overline{F'A'} = f.f'$$

(Formules de Newton)

b) Origines aux points principaux :

Les origines des mesures algébriques sont prises en H pour le milieu objet et en H' pour le milieu image.



(S)

$\overline{FA}.\overline{F'A'} = f.f'$ (formule de Newton)

$$\left(\overline{FH} + \overline{HA}\right)\left(\overline{F'H'} + \overline{H'A'}\right) = f.f'$$

$$\left(-f + \overline{HA}\right)\left(-f' + \overline{H'A'}\right) = f.f'$$

$$f.f' - f.\overline{H'A'} - f'.\overline{HA} + \overline{HA}.\overline{H'A'} = f.f'$$

$$f.\overline{H'A'} + f'.\overline{HA} = \overline{HA}.\overline{H'A'}$$

$$\frac{f.\overline{H'A'} + f'.\overline{HA}}{\overline{HA}.\overline{H'A'}} = \frac{\overline{HA}.\overline{H'A'}}{\overline{HA}.\overline{H'A'}}$$

$$\boxed{\frac{f}{\overline{HA}.} + \frac{f'}{\overline{H'A'}} = 1} \qquad (9)$$

$$\frac{\left(\frac{f}{f'}\right)}{\overline{HA}} + \frac{1}{\overline{H'A'}} = \frac{1}{f'}$$

$$\frac{-\frac{n}{n'}}{\overline{HA}} + \frac{1}{\overline{H'A'}} = \frac{1}{f'}$$

$$-\frac{n}{\overline{HA}} + \frac{n'}{\overline{H'A'}} = \frac{n'}{f'}$$

$$\boxed{\frac{n'}{\overline{H'A'}} - \frac{n}{\overline{HA}} = \frac{n'}{f'}} \qquad (10)$$

Remarque :
On montre que :

$$\boxed{\frac{f}{f'} = -\frac{n}{n'}} \qquad (11)$$

Dans un système dioptrique les distances focales objet et image sont de signes opposés.

Le système est dit convergent si $f' > 0$, divergent si $f' < 0$.

6-3 Grandissement axial

Posons : $x = \overline{FA}$ et $x' = \overline{F'A'}$

$x.x' = f.f'$ (formule de Newton)

$$\Rightarrow d(x.x') = xdx' + x'dx = d(f.f') = 0$$

$$\Rightarrow g = \frac{dx'}{dx} = -\frac{x'}{x} = -\frac{f.f'}{x^2} = -\frac{f^2}{x^2}.\frac{f'}{f} = +\frac{n'}{n}\left(\frac{f}{x}\right)^2 = \left(\frac{n'}{n}\right)\gamma^2 > 0$$

Si x croît, il en est de même de x' : l'objet et l'image se déplacent dans le même sens.

Remarque :

$$\boxed{g = \left(\frac{n'}{n}\right)\gamma^2} \qquad (12)$$

$$\boxed{\gamma G = \frac{n}{n'}} \qquad (13)$$

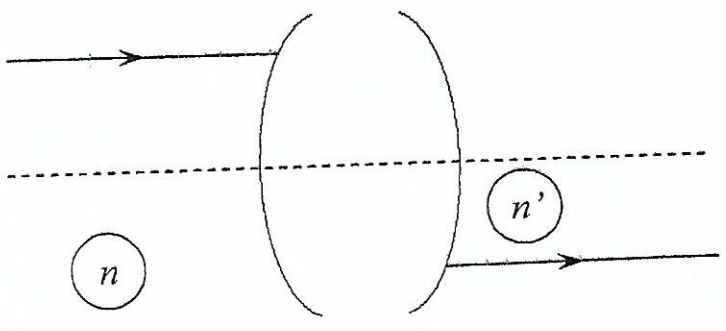
Donc on a :

$$gG = \left(\frac{n'}{n}\right)\gamma^2.\left(\frac{n}{n'}\right)\frac{1}{\gamma}$$

$$\boxed{gG = \gamma} \qquad (14)$$

VII – Définitions

1°/ Un système est afocal lorsque ses foyers sont rejetés à l'infini.



(S)

De ce fait, à un rayon incident parallèle à l'axe, correspondra un rayon émergent également parallèle à l'axe.

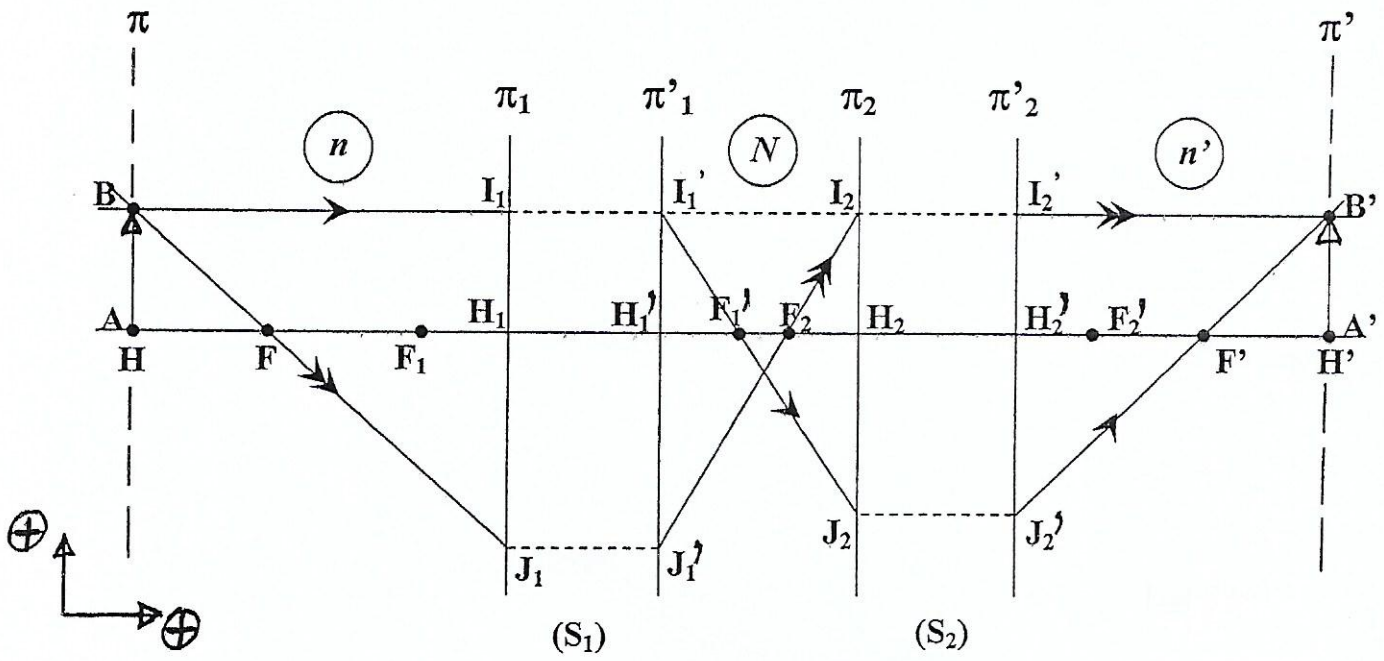
2°/ On appelle plans antiprincipaux le couple de plans conjugués pour lesquels $\gamma = -1$. Les points antiprincipaux X et X' sont les intersections de ces plans avec l'axe principal.

3°/ On appelle points nodaux les points conjugués de l'axe principal N et N' pour lesquels $G = +1$.

4°/ On appelle points antinodaux les points conjugués de l'axe principal v et v' pour lesquels $G = -1$.

VIII – Association de deux systèmes centrés dioptriques

8-1 Eléments cardinaux – Distances focales



$\overline{HF} = f =$ distance focale objet de l'association des deux systèmes : (S) = (S_1) + (S_2)

$\overline{H'F'} = f' =$ distance focale image de (S)

$\overline{F_1'F_2} = \Delta =$ intervalle optique du système (S)

Position de F :

Les rayons incidents passant par F, émergent de (S_1) en passant par F_2 (car ils doivent émerger de (S_2) parallèlement à l'axe optique). Donc F_2 est l'image de F à travers (S_1) :

$$\overline{F_1F}.\overline{F_1'F_2} = f_1.f_1' \quad \text{(formule de Newton)}$$

$$\overline{F_1F}.\Delta = f_1.f_1'$$

$$\boxed{\overline{F_1F} = \frac{f_1.f_1'}{\Delta}} \qquad (15)$$

Position de F' :

Les rayons passant par F_1', émergent de (S_2) en passant par F' (car ils sont parallèles à l'axe optique en arrivant sur (S_1)). Donc F' est l'image de F_1' à travers (S_2) :

$$\overline{F_2F_1'}.\overline{F_2'F'} = f_2.f_2'$$

$$-\Delta.\overline{F_2'F'} = f_2.f_2'$$

$$\boxed{\overline{F_2'F'} = -\frac{f_2.f_2'}{\Delta}} \qquad (16)$$

Calcul de f :

Les triangles FAB et FH_1J_1 étant semblables :

$$\frac{\overline{FH_1}}{\overline{FH}} = \frac{\overline{H_1J_1}}{\overline{AB}} \Longrightarrow \overline{AB} = \frac{\overline{FH}.\overline{H_1J_1}}{\overline{FH_1}}$$

Les triangles $F_2H_2I_2$ et $F_2H'_1J'_1$ étant semblables :

$$\frac{\overline{F_2H_2}}{\overline{F_2H_1'}} = \frac{\overline{H_2I_2}}{\overline{H_1'J_1'}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{H_1'J_1'}} \Longrightarrow \overline{A'B'} = \frac{\overline{F_2H_2}.\overline{H_1'J_1'}}{\overline{F_2H_1'}}$$

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = +1$$

$$\frac{\overline{F_2H_2}.\overline{H_1'J_1'}}{\overline{F_2H_1'}}.\frac{\overline{FH_1}}{\overline{FH}}.\frac{1}{\overline{H_1J_1}} = 1$$

$$\boxed{f = \overline{HF} = -\overline{FH} = -\frac{\overline{F_2H_2}.\overline{FH_1}}{\overline{F_2H_1'}}} \qquad (17)$$

$\overline{F_2H_2} = -f_2$

$\overline{FH_1} = \overline{FF_1} + \overline{F_1H_1} = -\frac{f_1f_1'}{\Delta} - f_1$

$\overline{F_2H_1'} = \overline{F_2F_1'} + \overline{F_1'H_1'} = -\Delta - f_1'$

$$f = -\frac{(-f_2)(-\frac{f_1f_1'}{\Delta} - f_1)}{-\Delta - f_1'}$$

$$f = \frac{f_2(\frac{f_1f_1'}{\Delta} + f_1)}{\Delta + f_1'} = \frac{f_1f_2(\frac{f_1'}{\Delta} + 1)}{\Delta + f_1'}$$

$$f = \frac{f_1f_2}{\Delta}.\frac{(f_1' + \Delta)}{\Delta + f_1'}$$

$$\boxed{f = \frac{f_1f_2}{\Delta}} \qquad (18)$$

Calcul de f ' :
Les triangles F'A'B' et F'H'$_2$J'$_2$ étant semblables :

$$\frac{\overline{F'H'}}{\overline{F'H_2'}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{H_2'J_2'}} \quad \Longrightarrow \quad \overline{A'B'} = \frac{\overline{F'H'}}{\overline{F'H_2'}}.\overline{H_2'J_2'}$$

Les triangles F'$_1$H$_2$J$_2$ et F'$_1$H'$_1$I'$_1$ étant semblables :

$$\frac{\overline{F_1'H_2}}{\overline{F_1'H_1'}} = \frac{\overline{H_2J_2}}{\overline{H_1'I_1'}} = \frac{\overline{H_2J_2}}{\overline{AB}} \quad \Longrightarrow \quad \overline{AB} = \frac{\overline{F_1'H_1'}.\overline{H_2J_2}}{\overline{F_1'H_2'}}$$

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = +1$$

$$\frac{\overline{F'H'}}{\overline{F'H_2'}}.\overline{H_2'J_2'}.\frac{\overline{F_1'H_2}}{\overline{F_1'H_1'}}.\frac{1}{\overline{H_2J_2}}=1$$

$$\boxed{f'=\overline{H'F'}=-\overline{F'H'}=-\frac{\overline{F'H_2'}.\overline{F_1'H_1'}}{\overline{F_1'H_2}}} \qquad (19)$$

$$\overline{F_1'H_1'}=-f_1'$$

$$\overline{F'H_2'}=\overline{F'F_2'}+\overline{F_2'H_2'}=\frac{f_2f_2'}{\Delta}-f_2'$$

$$\overline{F_1'H_2}=\overline{F_1'F_2}+\overline{F_2H_2}=\Delta-f_2$$

$$\Longrightarrow \qquad f'=-\frac{(\frac{f_2f_2'}{\Delta}-f_2')(-f_1')}{\Delta-f_2}$$

$$f'=\frac{f_1'f_2'\left(\frac{f_2}{\Delta}-1\right)}{\Delta-f_2}$$

$$f'=\frac{f_1'f_2'}{\Delta}.\frac{(f_2-\Delta)}{\Delta-f_2}$$

$$\boxed{f'=-\frac{f_1'f_2'}{\Delta}} \qquad (20)$$

Remarque :
Si $\Delta=0$: $f\to\infty$, $f'\to\infty$
Donc le système (S) est afocal.

8-2 Vergence – Formule de Gullstrand

$$V_1=\frac{N}{f_1'} \qquad V_2=\frac{n'}{f_2'}$$

$$V=\frac{n'}{f'}=\frac{n'}{\frac{-f_1'f_2'}{\Delta}}=-\frac{n'.\Delta}{f_1'f_2'}$$

$$\Delta = \overline{F_1' F_2} = \overline{F_1' H_1'} + \overline{H_1' H_2} + \overline{H_2 F_2} = -f_1' + e + f_2$$

$$V = -\frac{n'}{f_1' f_2'}(-f_1' + e + f_2)$$

$$V = \frac{n'}{f_2'} - \frac{n'.e}{f_1' f_2'} - \frac{n'.f_2}{f_1' f_2'}$$

$$\frac{n'}{f_2'} = V_2$$

$$-\frac{n'.e}{f_1' f_2'} = -e.\frac{n'}{f_2'}.\frac{1}{f_1'} = -eV_2.\frac{V_1}{N} = -\frac{e}{N}V_1V_2$$

$$-\frac{n'f_2}{f_1' f_2'} = -n'.\frac{1}{f_1'}.(\frac{f_2}{f_2'}) = -n'.\frac{V_1}{N}.(-\frac{N}{n'}) = V_1$$

$$\Longrightarrow \quad V = V_2 - \frac{e}{N}V_1V_2 + V_1$$

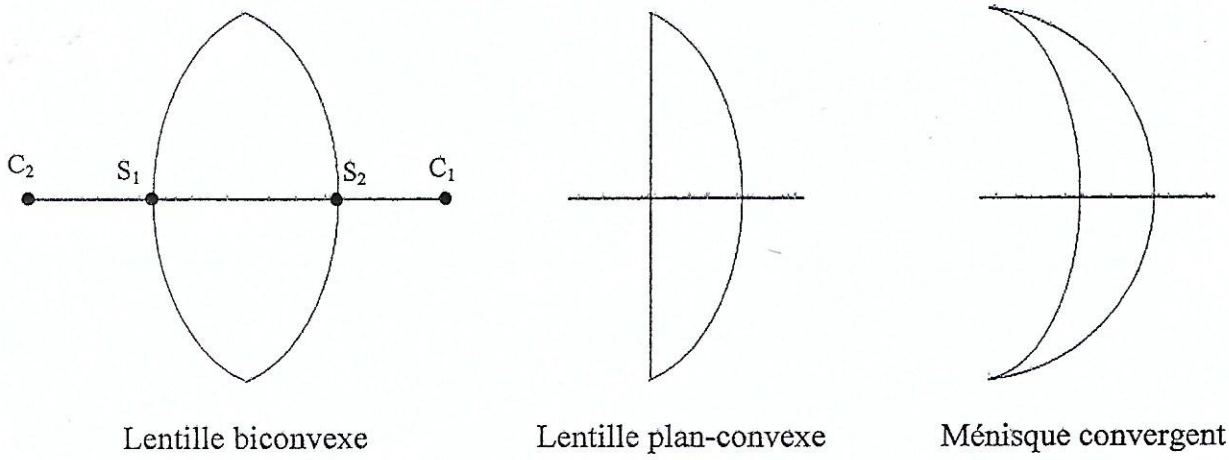
$$\boxed{V = V_1 + V_2 - \frac{e}{N}V_1V_2} \qquad (21)$$

(Formule de Gullstrand)

CHAPITRE 8 : LES LENTILLES MINCES

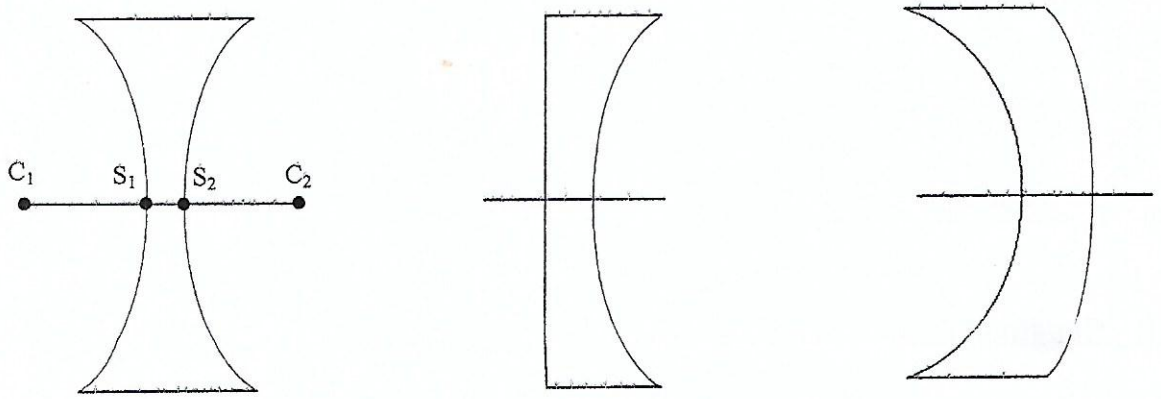
I - Définitions

Une lentille est un milieu transparent homogène et isotrope limité par deux dioptres sphériques ou un dioptre sphérique et un dioptre plan.



Lentille biconvexe | Lentille plan-convexe | Ménisque convergent

Figure 1 : Lentilles à bords minces



Lentille biconcave | Lentille plan-concave | Ménisque divergent

Figure 2 : Lentilles à bords épais

II – Centre optique

Le centre optique d'un système optique est le point de l'axe de révolution par lequel passe le rayon réfracté correspondant à un rayon incident qui émerge du système suivant une direction parallèle à la direction incidente.

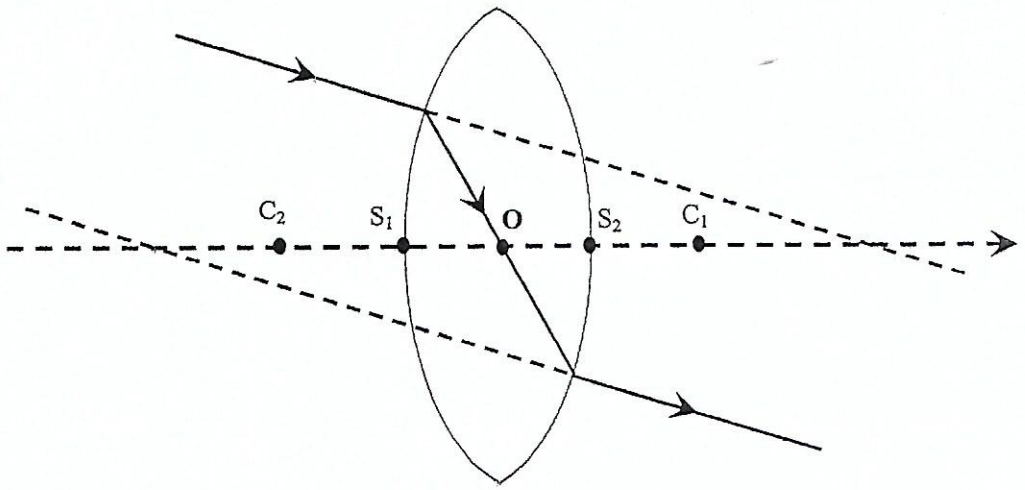


Figure 3 : Centre optique O

On montre que :

$$\frac{\overline{OC_1}}{\overline{OC_2}} = \frac{\overline{OS_1}}{\overline{OS_2}} = \frac{R_1}{R_2}$$

où : $R_1 = \overline{S_1C_1}$ et $R_2 = \overline{S_2C_2}$

III - Condition de minceur d'une lentille

Soit e l'épaisseur de la lentille : $e = S_1S_2$.
La lentille est dite mince si :

$e << |R_1|$

$e << |R_2|$

$e << |R_1 - R_2|$

Dans ces conditions, les points S_1, S_2 et O sont supposés confondus.

IV - Formation de l'image d'un objet

4-1 Image d'un objet ponctuel placé sur l'axe optique

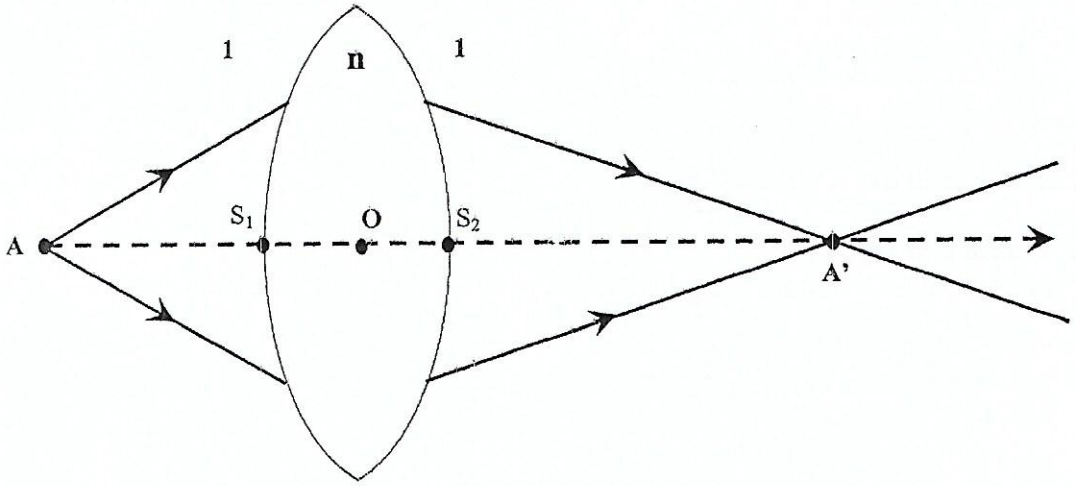


Figure 4 : Image d'un objet ponctuel

La formule de conjugaison suivante est utilisée en prenant l'origine au point O :

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) \qquad (1)$$

4-2 Image d'un objet plan perpendiculaire à l'axe optique

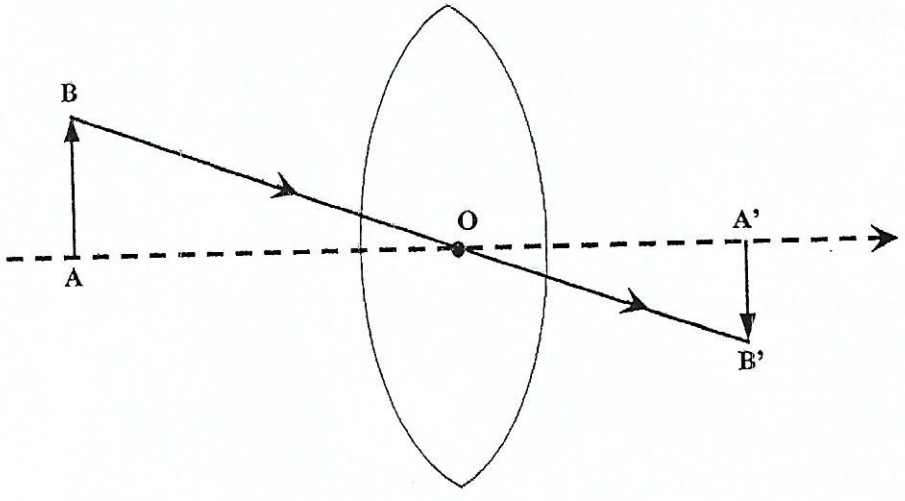


Figure 5 : Image d'un objet plan

La position de l'image est donnée par la formule de conjugaison précédente.
Le grandissement linéaire (ou transversal) est donné par la relation :

$$\boxed{\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}} \qquad (2)$$

V - Points principaux - Foyers

5-1 Points principaux

Le grandissement linéaire est égal à l'unité pour les points principaux :

$$\gamma = \frac{\overline{OH'}}{\overline{OH}} = 1 \Rightarrow \overline{OH'} = \overline{OH} \Rightarrow H' = H$$

D'autre part H' et H sont conjugués ; on a donc :

$$\frac{1}{\overline{OH'}} - \frac{1}{\overline{OH}} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) \Rightarrow \overline{OH} - \overline{OH'} = \overline{OH}.\overline{OH'}.(n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} \overline{OH} - \overline{OH'} = 0 \\ (n-1)\left(\dfrac{1}{R_1} - \dfrac{1}{R_2}\right) \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \overline{OH} = \overline{OH'} = 0$$

On conclut que les points O, H et H' sont confondus. Les plans principaux sont confondus avec la lentille.

5-2 Foyers

*** Foyer principal objet F :**

$$\overline{OA'} \to \infty \Rightarrow \overline{OA} = \overline{OF}$$

$$(1) \Rightarrow -\frac{1}{\overline{OF}} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

*** Foyer principal image F'**

$$\overline{OA} \to \infty \Rightarrow \overline{OA'} = \overline{OF'}$$

$$(1) \Rightarrow \frac{1}{\overline{OF'}} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

5-3 Distances focales

$$\frac{1}{f'} = \frac{1}{\overline{OF'}} = \frac{1}{\overline{H'F'}} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) \qquad (3)$$

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{\overline{OF}} = \frac{1}{\overline{HF}} = -(n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) \qquad (4)$$

On en déduit que :

$$f' = -f \qquad (5)$$

Si $f' > 0$, la lentille est convergente.
Si $f' < 0$, la lentille est divergente.

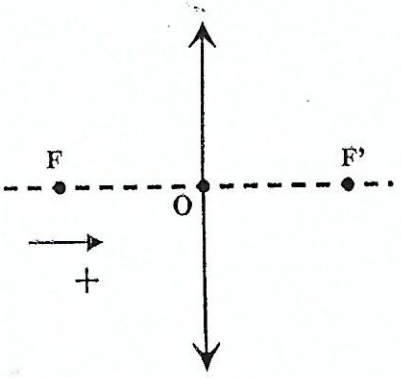


Figure 6 : Lentille convergente

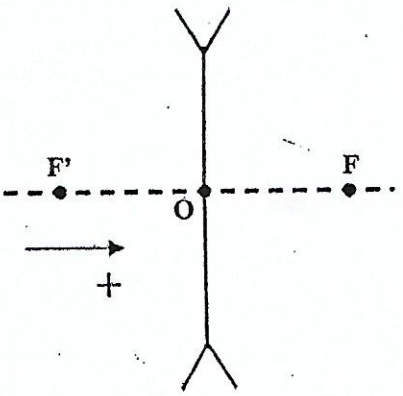


Figure 7 : Lentille divergente

VI – Constructions géométriques

a) Tout rayon passant par le centre optique n'est pas dévié.

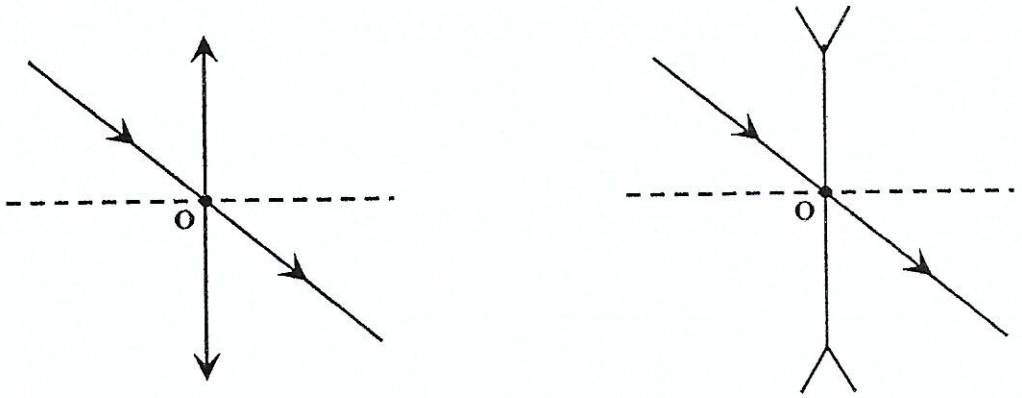


Figure 8 : Rayon passant par le centre optique

b) Les rayons incidents parallèles à l'axe optique émergent en passant par le foyer principal image F'.

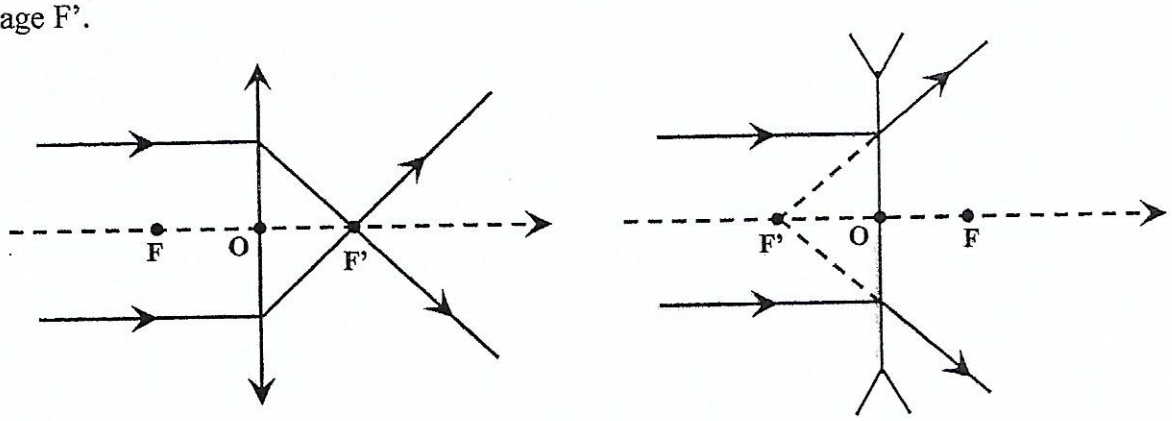


Figure 9 : Rayons incidents parallèles à l'axe optique

c) Les rayons partant du foyer principal objet F émergent parallèlement à l'axe optique.

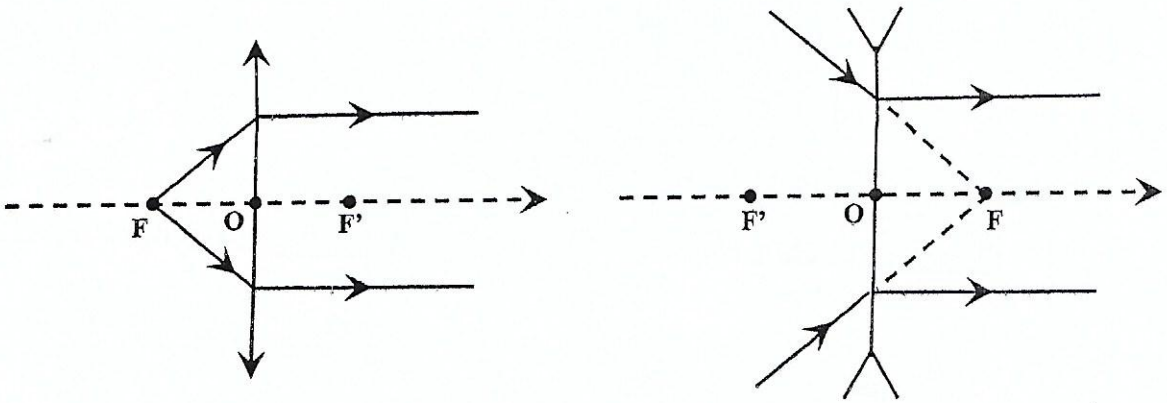


Figure 10 : Rayons émergents parallèles à l'axe optique

d) Deux rayons incidents parallèles et inclinés sur l'axe optique émergent en passant par le même foyer secondaire image φ'.

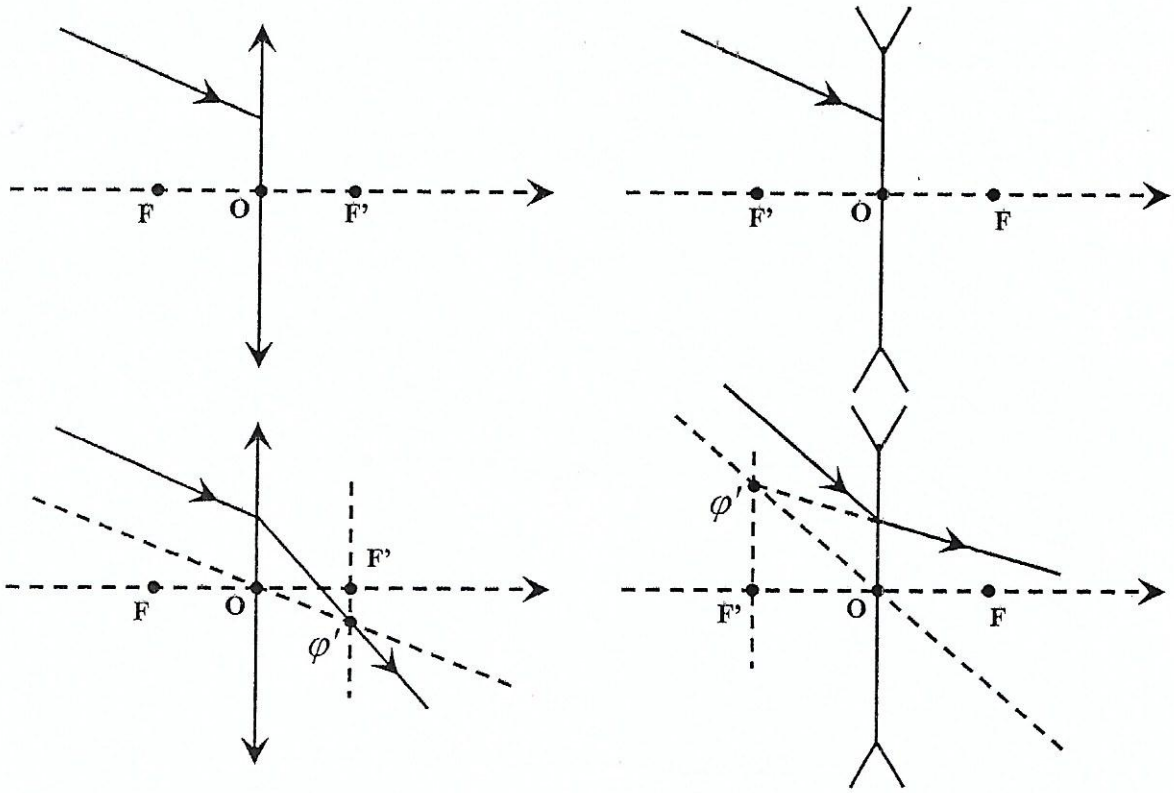


Figure 11 : Tracé d'un rayon émergent

e) Deux rayons émergents parallèles et inclinés sur l'axe optique proviennent du même foyer secondaire objet φ.

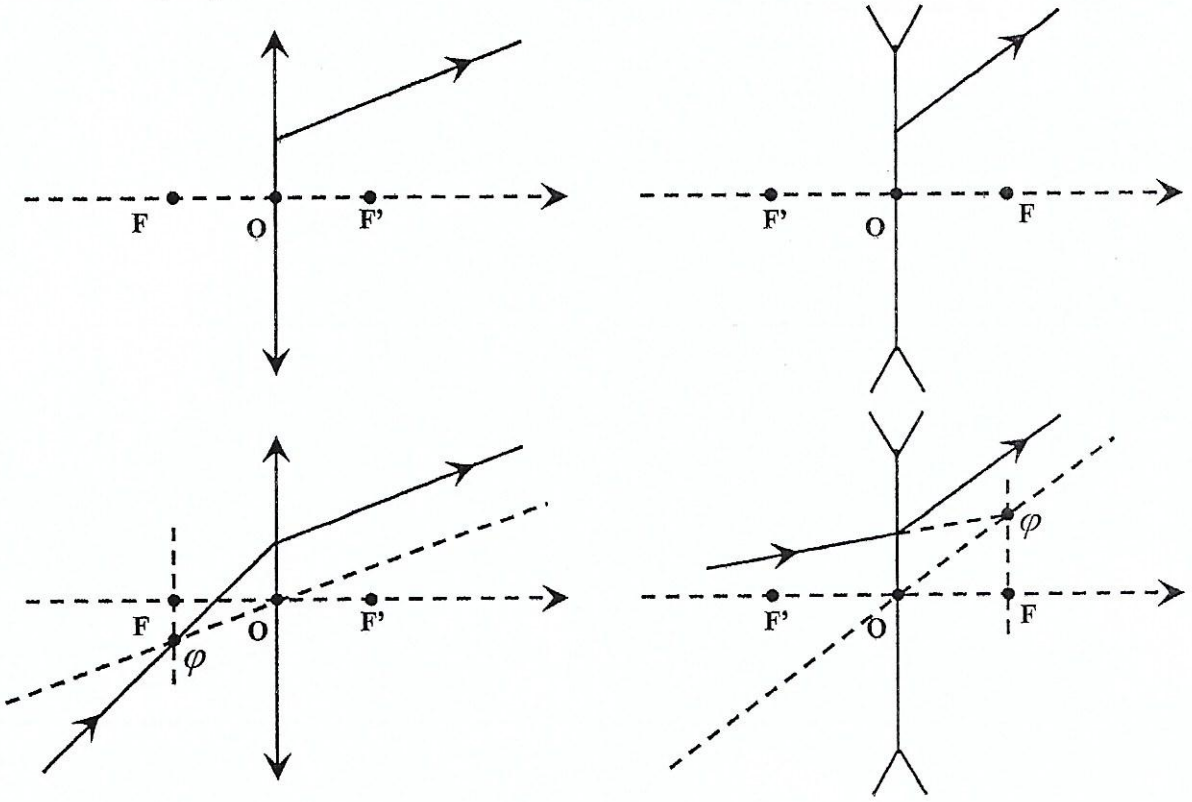
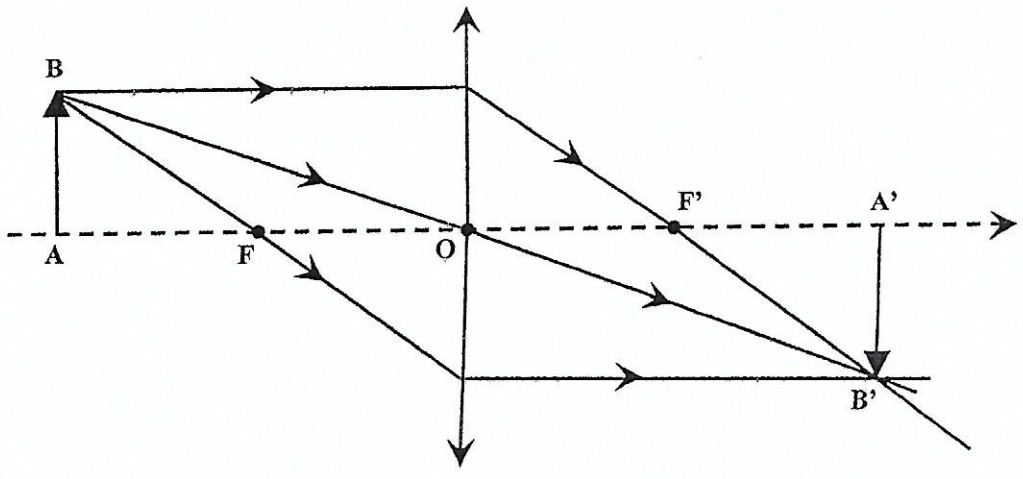


Figure 12 : Tracé d'un rayon incident

f) Pour la construction de l'image A'B' d'un objet AB, on se sert d'au moins deux des trois rayons suivants dont les trajectoires sont bien connues :
- le rayon passant par le foyer objet et émergent parallèlement à l'axe optique ;
- le rayon passant par le centre optique (qui n'est pas dévié) ;
- le rayon parallèle à l'axe optique et émergent en passant par le foyer image.



Lentille convergente

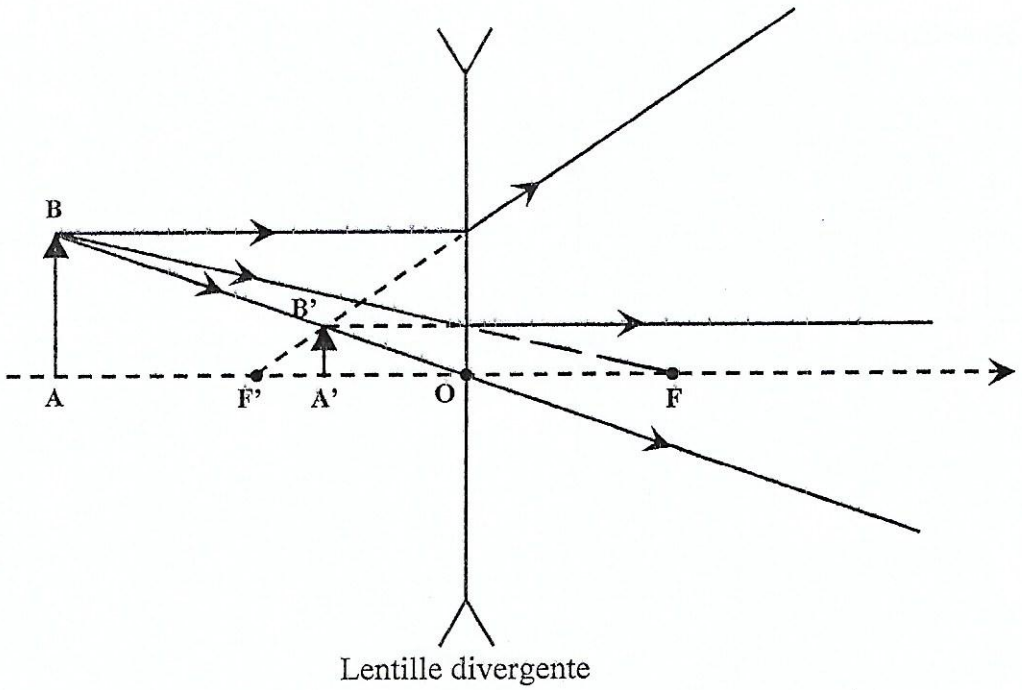


Figure 13 : Construction d'image à travers une lentille mince

VII – Relations de conjugaison

7-1 Avec origine au centre optique (formules de Descartes)

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{\overline{f'}} = -\frac{1}{f} \qquad (6)$$

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} \qquad (7)$$

7-2 Avec origines aux foyers (formules de Newton)

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{FS}}{\overline{FA}} = \frac{\overline{F'A'}}{\overline{F'S}} = -\frac{f}{\overline{FA}} = -\frac{\overline{F'A'}}{f'} \qquad (8)$$

$$\overline{FA}.\overline{F'A'} = f.f' = -f'^2 \qquad (9)$$

7-3 Remarques

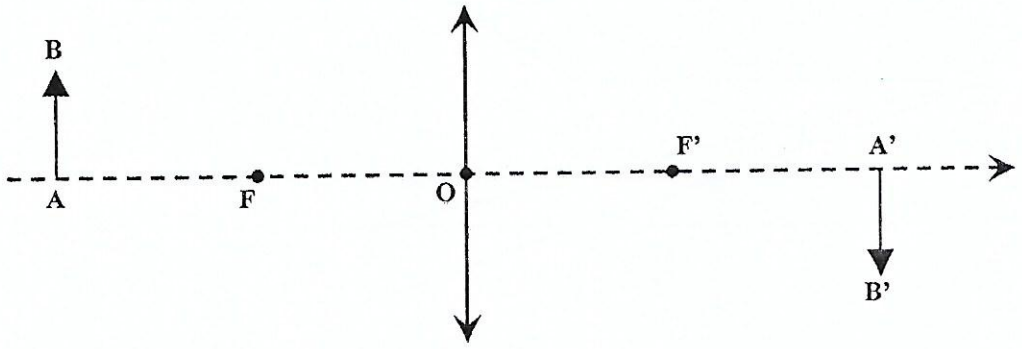


Figure 14 : Lentille mince

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$$

$\overline{OA} > 0$: Objet virtuel

$\overline{OA} < 0$: Objet réel

$\overline{OA'} > 0$: Image réelle

$\overline{OA'} < 0$: Image virtuelle

$\gamma > 0$: Image droite

$\gamma < 0$: Image renversée

$|\gamma| < 1$: Image rétrécie

$|\gamma| > 1$: Image agrandie

CHAPITRE 9 : L'ŒIL ET LES INSTRUMENTS D'OPTIQUE

A – L'ŒIL

I - Description

L'œil est l'organe de la vision ; il peut observer directement des objets ou bien examiner les images données par des systèmes optiques ; son rôle est fondamental en optique.
C'est un globe de 12 mm environ de rayon, limité par la sclérotique , membrane d'épaisseur voisine de 2 mm, dont la partie antérieure ou cornée est transparente et plus bombée (8 mm de rayon). Bien que ce ne soit pas rigoureux, nous admettrons que le diamètre commun à la cornée et au globe est un axe de révolution pour l'œil et que les différents organes constitutifs sont centrés sur cet axe.

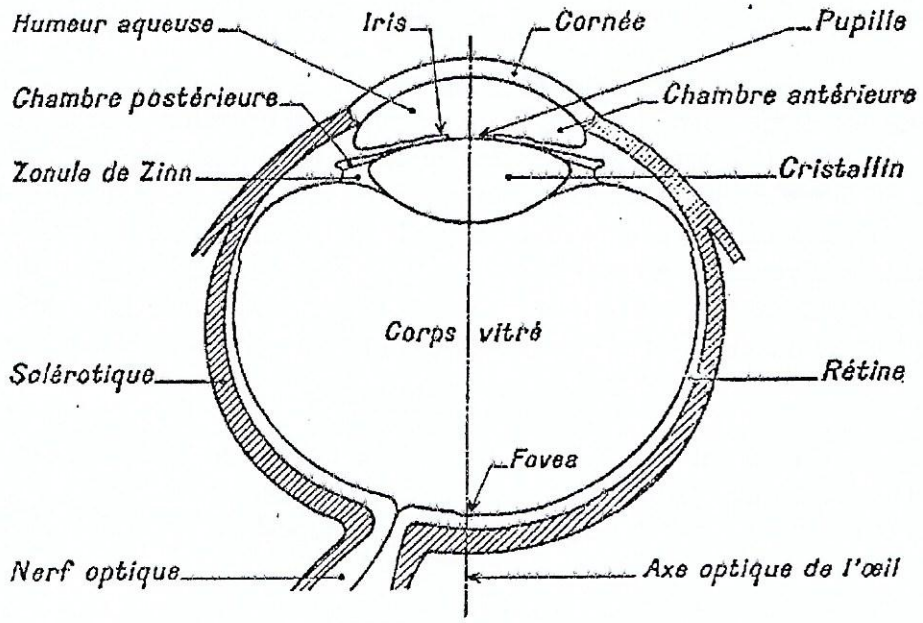


Fig. 1

La cavité est séparée en deux compartiments par le *cristallin* Cr et par une membrane ou *zonule de Zinn* qui s'insère sur les muscles ciliaires et sur le pourtour de Cr (fig. 1). La chambre antérieure à 4 mm d'épaisseur ; elle est remplie par l'*humeur aqueuse,* liquide transparent d'indice 1,336. La chambre arrière, profonde de 16 mm, contient l'*humeur vitrée*, masse gélatineuse d'indice 1,336.
Le *cristallin* est une sorte de lentille non homogène, épaisse de 4 mm environ, formée de couches superposées capables de glisser les unes sur les autres ; son indice croît de 1,36 sur les bords à 1,42 sur l'axe ; les rayons de courbure sont respectivement 10 mm pour la face antérieure et 6 mm seulement pour la face postérieure ; son diamètre enfin est voisin de 10 mm.
En avant du cristallin, il existe un diaphragme coloré, l'*iris*, dont l'ouverture ou *pupille* a un diamètre variable de 2 à 8 mm.
Le fond de l'œil est tapissé par la *rétine* Rt, écran sur lequel se forme l'image. Elle est l'épanouissement du nerf optique, dont les filaments aboutissent à deux sortes de cellules, de formes différentes, les *cônes* (diamètre 4μ m) et les *bâtonnets*, la sensibilité des cônes étant la

plus élevée en vision diurne. La répartition des cellules n'est pas régulière : une légère dépression, la *fovea centralis*, de 0,3 mm de diamètre, ne comprend que des cônes et se place au centre de la *tache jaune* T (diamètre 2 mm), elle-même riche en cônes. En fait, la sensibilité de la rétine pour la vision diurne est limitée à cette tache de surface très réduite, légèrement écartée de l'axe de l'œil.
L'*axe visuel* ou *axe optique* joint la fovea au centre optique C de l'œil et fait un angle de 5° environ avec l'axe géométrique.
Un point A est vu si son image se forme sur T : pour permettre la vision de points différents sans imposer chaque fois le déplacement de la tête, l'œil effectue des rotations rapides dans son orbite autour d'un point O qui est sensiblement le centre du globe oculaire.

II - Œil réduit

Les rayons issus d'un objet et concourant à la formation de l'image rétinienne sont paraxiaux pour l'œil ; les conditions de l'approximation de Gauss sont satisfaites et l'on peut définir les éléments cardinaux de l'œil. Les milieux extrêmes, air et humeur vitrée, sont différents, les points nodaux sont distincts des points principaux et le rapport des distances focales image et objet est –1,336.
La cornée indéformable, avec une épaisseur de 2 mm, un rayon de 8 mm et un indice de 1,377, a une convergence d'une quarantaine de dioptries ; celle du cristallin d'un observateur à vue normale regardant très loin est de 19 dioptries environ ; la convergence de l'ensemble est sensiblement de 60 dioptries. La distance focale image f ' vaut 23 mm, la distance focale objet 17 mm. Pour l'œil normal au repos, le foyer image F' est sur la rétine et le foyer objet F est à 15 mm en avant de la cornée. De ces positions et des dimensions de l'œil, il résulte que l'interstice HH' est environ de 0,3 mm ; il en est de même de la distance NN' des points nodaux, si bien que l'on peut considérer H et H' comme confondus, ainsi que N et N'.

Conclusion :
Au point de vue optique, l'œil est équivalent à un dioptre unique de sommet S (position commune de H et H'), de centre C (ou centre optique confondu avec N et N'), de 6 mm de rayon, séparant l'air et le milieu d'indice 1,336 : ce dioptre est appelé *œil réduit* (fig. 2).

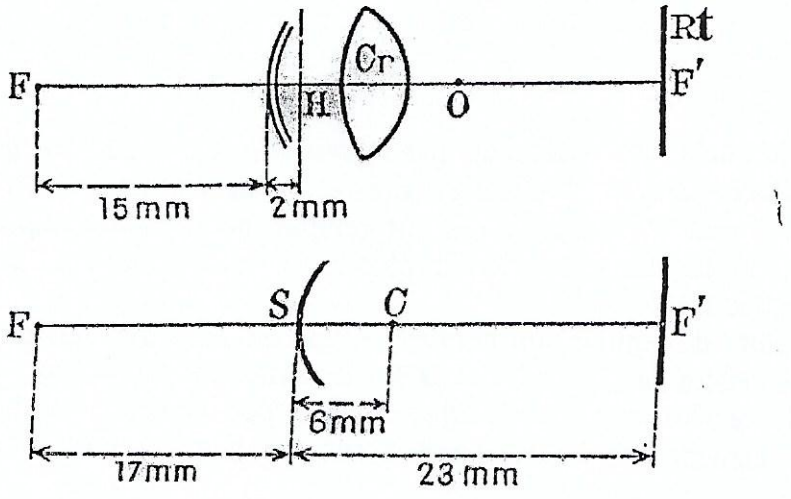


Fig. 2

III - Champs de l'œil

Seuls sont vus nettement les points de l'espace dont l'image se forme sur la tache jaune ; leur ensemble constitue *le champ de vision nette*. Il est défini par le cône de sommet C circonscrit à la fovea, son angle au sommet est environ de 1°, son axe est l'axe visuel. Cette définition suppose l'œil immobile et la tête fixe.

Mais la rotation de l'œil autour de son centre O dans le globe oculaire accroît nettement l'étendue du champ, la tête restant fixe ; horizontalement, il atteint aisément 30° de part et d'autre de l'axe et même 40° en accentuant l'effort. Il est un peu moins important dans le sens vertical. Tous les points visibles par ce mécanisme appartiennent au *champ de vision directe*.

On peut se rendre compte, en gardant l'œil immobile, que l'on aperçoit des points très écartés de l'axe ; leurs images se forment en dehors de la fovea et manquent de netteté ; on dit que ces points sont aperçus *en vision indirecte*. Leur champ est vaste et atteint 140° dans le sens horizontal.

IV- Accommodation

De très nombreux observateurs peuvent regarder longtemps et sans fatigue des objets éloignés : *leur vue est normale*, le foyer image de l'œil est sur la rétine.

Si l'œil restant tel quel à l'état normal, un objet d'abord très éloigné se rapproche de lui, son image se forme en arrière de la rétine et il cesse d'être vu nettement. Or, on constate que la vision reste bonne : donc l'œil a subi une modification qui a pour effet de ramener sur la rétine l'image d'un objet rapproché : *on dit qu'il accommode*.

L'accommodation se traduit par une augmentation de la convergence du cristallin grâce à un accroissement de la courbure des faces et peut-être à une variation d'indice. Ces déformations sont obtenues par pression des muscles de la zonule, principalement sur la face antérieure du cristallin ; cette action musculaire, si elle est prolongée, s'accompagne d'une fatigue.

Il est évident que l'accommodation, limitée par les possibilités musculaires de l'œil, ne joue plus en deçà d'un point P appelé *punctum proximum situé à la distance minimale d de vision distincte*. Cette distance ne peut pas être définie avec précision, elle varie avec l'âge ; pour un œil normal ou *emmétrope*, elle est de l'ordre de 15cm à 20 ans.

V - Amétropies

Nous considérons comme normal un œil qui, en l'absence d'accommodation, donne d'un objet à l'infini une image sur la rétine ; le point le plus éloigné qu'il peut voir ou *punctum remotum* R est à l'infini.

Si, un œil étant au repos, l'image d'un point à l'infini se forme en avant ou en arrière de la rétine, l'œil est dit anormal ou *amétrope*.

Un œil est *myope* quand F' est en avant de la rétine ; il est donc trop profond pour sa convergence, si l'on admet que tous les yeux ont sensiblement la même puissance. Au repos il ne peut pas voir un objet à l'infini, l'accommodation ne ferait qu'aggraver le défaut. Si l'objet se rapproche, l'image se rapproche de la rétine et se forme sur elle, toujours en l'absence d'accommodation, quand il atteint le punctum remotum ; la distance SR= D est la distance maximale de vision. L'œil myope accommode pour voir les objets plus rapprochés et atteint la limite au punctum proximum. La distance minimale d est plus petite que pour l'œil normal et peut descendre jusqu'à 5 ou 6 cm.

L'*œil hypermétrope* est trop court pour sa convergence ; le foyer image de cet œil au repos est en arrière de la rétine et comme le conjugué du punctum remotum R doit être sur la rétine de l'œil non accommodé, donc en avant de F', R ne peut qu'être un point virtuel. Il faut accommoder pour voir les objets virtuels en arrière de R et les points réels situés en avant du

punctum proximum, lequel est plus loin que dans le cas de l'œil normal ; d peut être égal à 50 cm ou davantage.
La figure 3 ci-dessous représente les trois sortes d'yeux : emmétrope, myope et hypermétrope. F' est le foyer image de l'œil non accommodé ; le domaine de vision accessible grâce à l'accommodation est marqué sur l'axe en trait plus épais.

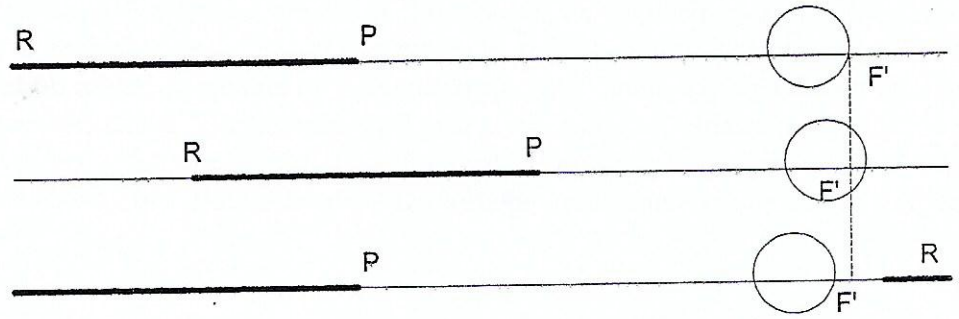


Fig. 3

VI - Amplitude dioptrique d'accommodation

La vergence du punctum proximum est $\frac{1}{d}$; elle est négative en prenant comme sens positif celui de la lumière. Celle du punctum remotum, $\frac{1}{D}$, est positive pour l'œil hypermétrope et négative pour les autres. L'amplitude dioptrique A du champ de vision est par définition :

$$A = \frac{1}{D} - \frac{1}{d} \qquad (1)$$

Cette quantité est intéressante à plusieurs points de vue :
1) Alors que d et D varient suivant la vue des observateurs, A est au contraire à peu près la même pour les personnes du même âge. Ainsi pour un œil emmétrope, vers 30 ans, on admet que : $d = -0{,}15m$, $D = \infty$, donc $A = 6{,}7 dioptries$.
Un myope, au même âge, a sensiblement la même amplitude dioptrique.
2) A mesure la convergence du verre qui donnerait du punctum proximum (P.P.) une image située au punctum remotum (P.R.), conjugaison qu'exprime $\frac{1}{D} - \frac{1}{d} = A$.

VII - Correction des amétropies

Le but de la correction d'une amétropie est de permettre à l'œil qui en est affecté de retrouver un comportement normal, et en particulier de voir sans accommoder un objet à l'infini. Pour cela, on associe à l'œil une lentille qui donne des points à l'infini une image au punctum remotum. La convergence de ce verre correcteur est donc $\frac{1}{D}$.

Simultanément, le P.P. de l'œil corrigé est situé à une distance d' telle que : $\frac{1}{d} - \frac{1}{d'} = \frac{1}{D}$,

d'où $-\frac{1}{d'} = \frac{1}{D} - \frac{1}{d} = A$, ce qui exprime que d' est la distance minimale de vision de l'œil normal : l'amétropie est complètement corrigée.

a) Pour un œil myope, le verre correcteur est divergent (D<0) ; il doit diminuer l'excessive convergence de cet œil (fig. 4a).
b) Pour un œil hypermétrope, D est positif ; le verre correcteur est convergent (fig. 4b).

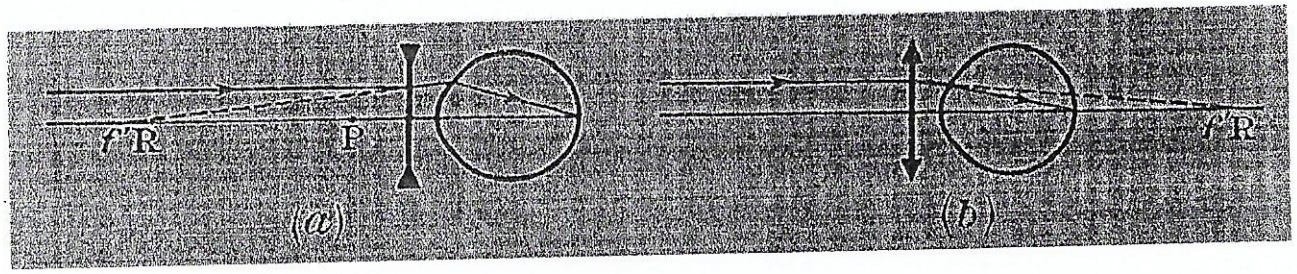


Fig. 4

VIII – Autres défauts de l'oeil

8-1 Presbytie

La faculté d'accommodation, liée à un effort musculaire, diminue avec l'âge : le P.P. s'éloigne progressivement de l'œil, le P.R. restant à peu près fixe ; l'amplitude dioptrique diminue et, pour un œil emmétrope, passe d'une dizaine de dioptries à 20 ans à 1 dioptrie vers 60 ans. On dit que l'œil devient *presbyte*.
Puisque le punctum proximum s'éloigne, la puissance maximale de l'œil diminue et l'on atténue la presbytie en adjoignant à l'œil un verre convergent. Il s'ensuit un rapprochement du punctum remotum et en définitive l'amplitude de l'œil armé reste celle de l'œil nu. Bien entendu, un observateur à vue normale devenu presbyte quitte ses lunettes pour regarder les objets éloignés qu'il continue à voir sans accommoder.
Etant donné son origine, la presbytie peut affecter toutes les vues, si bien qu'un myope presbyte doit utiliser deux verres correcteurs : l'un, divergent, pour la vision des objets éloignés, corrige la myopie ; l'autre, convergent, pour la vision d'objets proches, réduit la presbytie. On remplace souvent ces deux verres par un seul « à double foyer » : la partie supérieure est utilisée pour la vision éloignée, celle du bas, destinée à la lecture, est rendue plus convergente par soudure d'une pastille de verre (fig. 5).

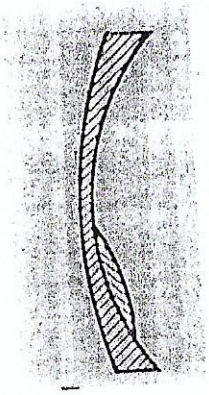


Fig. 5

8-2 Cataracte

La cataracte est un épaississement des tissus du cristallin entraînant d'abord une vision trouble, puis peu à peu la cécité. On est alors conduit à enlever le cristallin, ce qui diminue la convergence de l'œil d'une douzaine de dioptries et le rend presque complètement presbyte. On atténue ces diminutions physiques par l'emploi de verres fortement convergents ou de verres de contact.

8-3 Astigmatisme

Nous avons supposé que l'œil est un système centré. Quand cette condition n'est pas remplie apparaît le défaut de l'*astigmatisme* : la convergence n'est pas la même dans les différents plans méridiens et les images rétiniennes des deux bras d'une croix ne sont pas nettes simultanément.

IX - Grandeur de l'image rétinienne

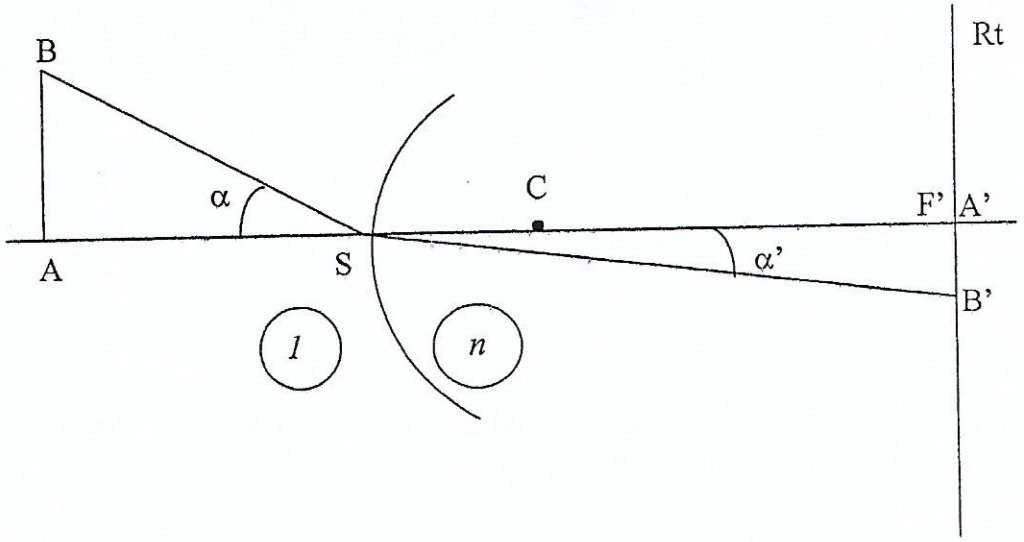


Fig. 6

L'accommodation modifie la position du centre optique C de l'œil, mais le sommet S de l'œil réduit reste sensiblement fixe. Si α est le diamètre apparent de l'objet AB vu de S (soit pratiquement du sommet de la cornée), dans les conditions de l'approximation de Gauss (α et α' petits), on a :

$$1 x \sin\alpha = n x \sin\alpha' \text{, soit } \alpha \approx n\alpha' \text{ (loi de Kepler)}$$

$$\alpha' \approx \frac{\alpha}{n}$$

$$\Rightarrow A'B' = F'B' = SF'.tg\alpha' \approx SF'.\alpha' \approx SF'.\frac{\alpha}{n} = \frac{SF'}{n}.\alpha = cte.\alpha$$

$$\boxed{A'B' = cte.\alpha} \qquad (2)$$

Donc la dimension linéaire A'B' de l'image rétinienne est proportionnelle au diamètre apparent α de l'objet AB.

X – Limite de perception – Limite de résolution

La dimension de l'image rétinienne d'un objet dépend uniquement du diamètre apparent de l'objet et non de sa position ou de sa grandeur linéaire (voir équation 2). Cela explique le rôle capital joué par les angles dans l'évaluation visuelle des longueurs.

10-1 Limite de perception de l'oeil

Sa définition est une réponse à la question : « Peut-on toujours voir un objet ? ».

La limite de perception est le diamètre apparent minimal que doit avoir un objet sombre pour être vu sur un fond lumineux. Elle dépend de la forme de l'objet et des conditions d'éclairement. Quand ces dernières sont normales, l'expérience donne 2" d'arc pour une ligne fine et un peu plus pour un disque.

10-2 Limite de résolution de l'œil ou acuité visuelle

Sa définition est une réponse à la question : « Peut-on toujours distinguer deux objets séparés ? ».

La limite de résolution de l'œil est la plus petite distance angulaire ε de deux objets dont les images rétiniennes sont pratiquement distinctes. Le pouvoir de résolution en est l'inverse.

Cette limite dépend encore de la forme des objets, de leur contraste avec le fond, et, en outre, de la luminance générale et du diamètre de la pupille de l'œil.

Pour les observations habituelles, la limite de résolution de l'œil observant des objets bien éclairés et bien contrastés est à peu près constante et égale à 1,5' (soit $4{,}36.10^{-4}$ rad), le diamètre de la pupille de l'œil étant compris entre 2 et 4 mm.

Remarque : La taille de l'image rétinienne correspondante est :

$$A'B' = \frac{SF'}{n} x\varepsilon = \frac{23.10^{-3}}{1{,}336} x 4{,}36.10^{-4} \approx 7{,}5\,\mu m$$

Or le diamètre d'un cône est d'environ 4 μ m.

B – LES INSTRUMENTS D'OPTIQUE

I – Classification et généralités

On se limite à deux groupes d'instruments d'optique, assimilables à des systèmes centrés, qui donnent de l'objet une image réelle ou virtuelle plus avantageuse à observer ou à stocker.

Les instruments qui donnent une image réelle constituent le premier groupe : les plus connus sont les objectifs des appareils de projection et les objectifs des appareils photos ou des caméras.

Le rôle des instruments du second groupe est de donner une image virtuelle ayant un diamètre apparent plus grand que l'objet observé à l'œil nu. Les plus connus sont les loupes et les microscopes pour l'examen de petits objets rapprochés et les lunettes pour l'observation des objets très éloignés ou des astres.

Bien que certaines des notions exposées dans ce chapitre soient applicables aux appareils des deux groupes, ce sont surtout les caractéristiques des instruments du second groupe qui sont décrites dans les paragraphes ci-après.

II – Grandissement, puissance et grossissement

Ces grandeurs permettent de comparer les dimensions linéaires ou angulaires de l'image et de l'objet.

2-1 Grandissement

Comme pour un dioptre ou une lentille, l'aplanétisme étant réalisé, le grandissement est le rapport d'une dimension linéaire A'B' de l'image à la dimension linéaire correspondante AB de l'objet :

$$\Gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} \qquad (3)$$

C'est un nombre sans dimension. Il n'est intéressant que dans le cas où l'objet et l'image sont tous les deux à distance finie et tous les deux réels, c'est-à-dire pour des appareils du premier groupe.

2-2 Puissance

La puissance n'est définie que pour les instruments du second groupe, comme la loupe ou le microscope, servant à l'observation d'objets très rapprochés.

La puissance d'un instrument est le rapport de l'angle sous lequel on voit l'image donnée par l'instrument à la longueur de l'objet (voir figure 7) :

$$P = \frac{\alpha'}{AB} \qquad (4)$$

La puissance s'exprime en dioptries si α' est exprimé en radians et AB en mètres.

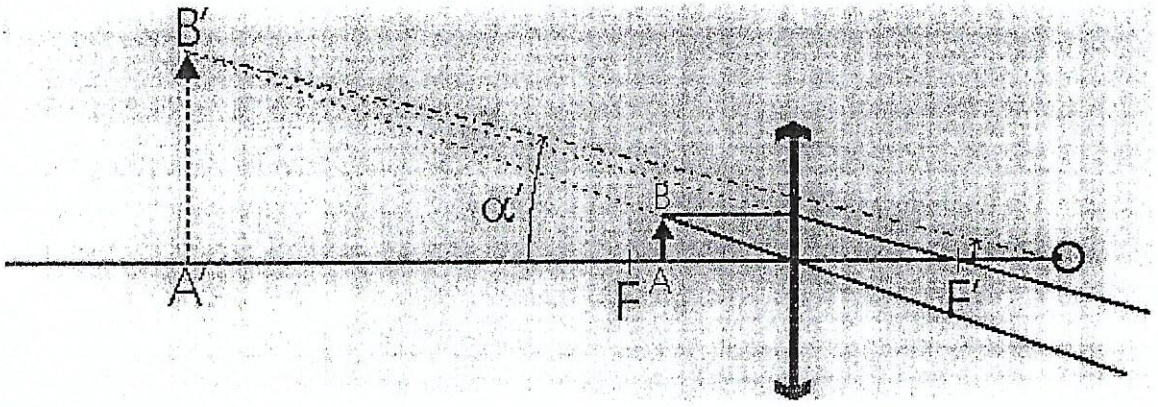


Fig. 7

La figure 7 ci-dessus illustre l'observation d'un petit objet AB à l'aide d'une loupe. Excepté le cas où l'image est à l'infini, α' dépend de la position de l'œil.

2-3 Grossissement

Cette grandeur est surtout intéressante lorsque l'objet est très éloigné et que l'image observée est virtuelle comme c'est le cas des instruments du second groupe tels que les lunettes astronomiques ou terrestres.

Le grossissement est le rapport des dimensions des images rétiniennes dans la vision à travers l'instrument et dans la vision à l'œil nu. Cela correspondant au rapport des diamètres apparents, le grossissement est donné par la relation :

$$G = \frac{\alpha'}{\alpha} \qquad (5)$$

C'est un nombre sans dimension.

Dans le cas de l'examen d'objets très rapprochés, à l'aide, par exemple, d'une loupe ou d'un microscope, l'angle α est défini en plaçant l'objet au punctum proximum, à la distance d = OA de l'œil O. Dans ce cas :

$$\alpha \approx tg\alpha = \frac{AB}{d}$$

$$\Rightarrow G = \frac{\alpha'}{AB} d \,,$$

soit :

$$G = P.d \qquad (6)$$

G dépend de l'observateur par l'intermédiaire de d. C'est pour s'affranchir de cette difficulté que le grossissement commercial G_C est défini en choisissant, pour un oeil moyen et dans un souci de simplification des calculs, la distance minimum de vision distincte d égale à 0, 25m (soit 1/4 m). Si P est en dioptries, on a alors :

$$G_C = \frac{P}{4} \qquad (7)$$

C'est ce grossissement commercial qui est inscrit sur les instruments d'optique.

III – Pouvoir séparateur

Le pouvoir séparateur est caractérisé par la plus petite distance entre deux points de l'objet vus séparés à travers l'instrument :

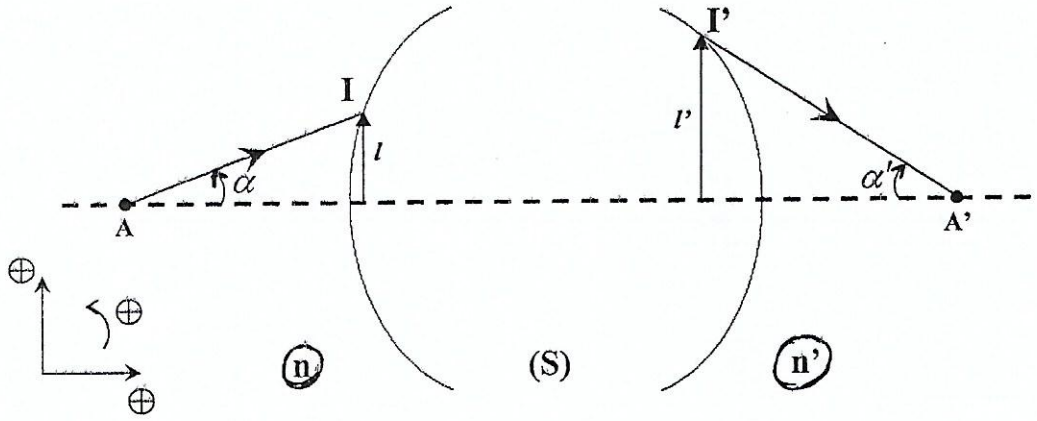
- c'est une distance linéaire si l'objet est à distance finie.

- c'est une distance angulaire si l'objet est « à l'infini ».

Un bon instrument d'optique doit réaliser, par construction, le stigmatisme approché pour les plans observés à distance finie constante, dans le cas d'une configuration de microscope, ou à l'infini, dans le cas d'une lunette astronomique. Le pouvoir séparateur est alors limité, soit par la limite de résolution de l'œil, soit par la diffraction.

CHAPITRE 10 : OPTIQUE GEOMETRIQUE ET CALCUL MATRICIEL

I - Introduction



Si l' et α' sont liés chacun à l et α par des relations linéaires, on a :

$$\begin{pmatrix} l' \\ \alpha' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l \\ \alpha \end{pmatrix}$$

$X = \begin{pmatrix} l \\ \alpha \end{pmatrix}$: matrice colonne d'entrée

$X' = \begin{pmatrix} l' \\ \alpha' \end{pmatrix}$: matrice colonne de sortie

$T(S) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$: matrice de transfert du système centré *(S)*

Remarques

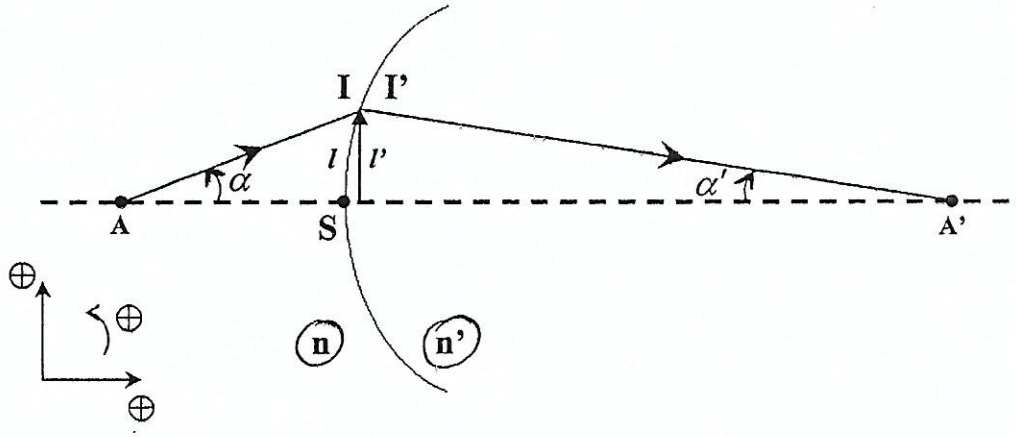
- On peut également travailler avec les angles pondérés par les indices de réfraction des milieux correspondants :

$$\begin{pmatrix} l' \\ n'\alpha' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l \\ n\alpha \end{pmatrix}$$

- Lorsque les rayons considérés sont paraxiaux (c'est-à-dire l, α, l', α' faibles), les équations de franchissement du système optique *(S)* sont linéaires, ce qui permet d'utiliser le calcul matriciel.
  Dans la suite du cours, on se placera donc dans les conditions de l'approximation de Gauss.

II – Matrices de transfert

2-1 Matrice de transfert (ou de réfraction) du dioptre sphérique



$$l' = l = 1.l + 0.\alpha \qquad (1)$$

$$\alpha > 0 \;\; ; \;\; \alpha \approx tg\alpha \cong \frac{l}{SA} = -\frac{l}{\overline{SA}} \Rightarrow \overline{SA} = -\frac{l}{\alpha}$$

$$\alpha' < 0 \;\; ; \;\; \alpha' \approx tg\alpha' \cong -\frac{l'}{SA'} = -\frac{l}{\overline{SA'}} \Rightarrow \overline{SA'} = -\frac{l}{\alpha'}$$

$$\frac{n'}{\overline{SA'}} - \frac{n}{\overline{SA}} = \frac{n'-n}{\overline{SC}} = \frac{n'}{f'} = V$$

$$-\frac{n'}{l}\alpha' + \frac{n}{l}\alpha = \frac{n'}{f'}$$

$$-\frac{n'}{l}\alpha' = \frac{n'}{f'} - \frac{n}{l}\alpha$$

$$\alpha' = -\frac{1}{f'}l + \frac{n}{n'}\alpha \qquad (2)$$

$$(1) \text{ et } (2) \Rightarrow \begin{pmatrix} l' \\ \alpha' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f'} & \frac{n}{n'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l \\ \alpha \end{pmatrix}$$

$$R_s = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f'} & \frac{n}{n'} \end{pmatrix} \qquad \text{(a)}$$

où : $f' = \frac{n'}{n'-n}\overline{SC}$

2-2 Matrice de transfert (ou de réfraction) du dioptre plan

$$\overline{SC} \to \infty \Rightarrow \frac{1}{f'} = \frac{n'-n}{n'\overline{SC}} = 0 \Big\} \Rightarrow R_p = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{n}{n'} \end{pmatrix} \qquad \text{(b)}$$

(d'après (a))

2-3 Matrice de transfert du miroir sphérique

Dans le cas du miroir sphérique, il suffit de poser : $n' = -n$.
On en déduit :

$$T_s = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f'} & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{(c)}$$

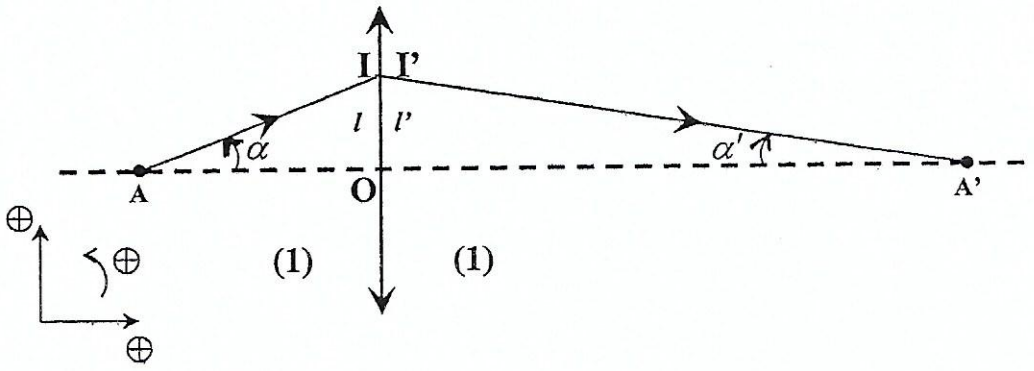
où : $f' = \frac{\overline{SC}}{2}$

2-4 Matrice de transfert du miroir plan

$$\overline{SC} \to \infty \Rightarrow \frac{1}{f'} = \frac{2}{\overline{SC}} = 0 \Big\} \Rightarrow T_p = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{(d)}$$

(d'après (c))

2-5 Matrice de transfert d'une lentille mince



$$l' = l = 1.l + 0.\alpha \qquad (1)$$

$$\alpha > 0 \;;\; \alpha \approx tg\alpha = \frac{l}{\overline{OA}} = \frac{l}{-\overline{OA}} \Rightarrow \frac{1}{\overline{OA}} = -\frac{\alpha}{l}$$

$$\alpha' < 0 \;;\; \alpha' \approx tg\alpha' = -\frac{l'}{\overline{OA'}} = -\frac{l}{\overline{OA'}} \Rightarrow \frac{1}{\overline{OA'}} = -\frac{\alpha'}{l}$$

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'}$$

$$-\frac{\alpha'}{l} + \frac{\alpha}{l} = \frac{1}{f'}$$

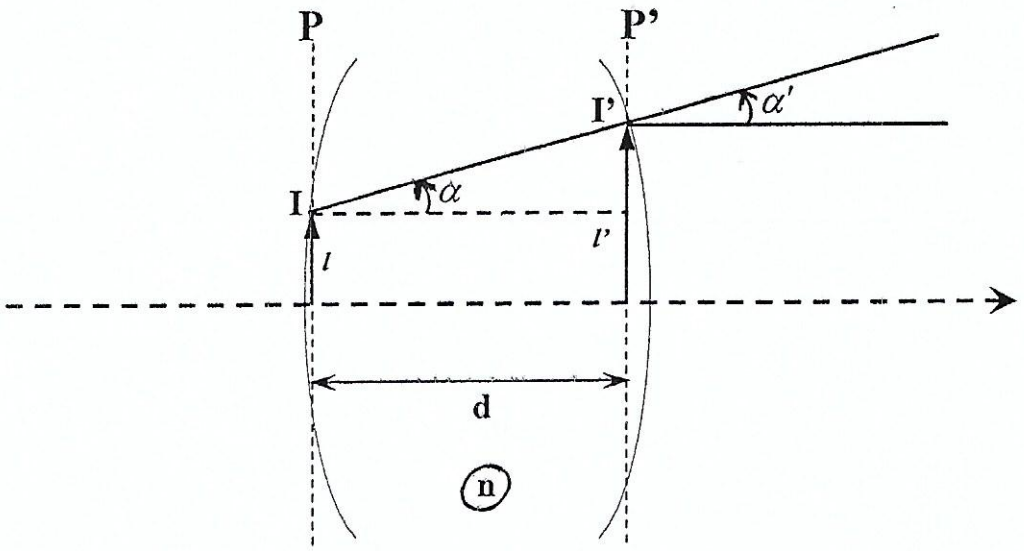
$$\alpha' = -\frac{1}{f'} l + \alpha \qquad (2)$$

$$(1) \text{ et } (2) \Rightarrow \begin{pmatrix} l' \\ \alpha' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f'} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l \\ \alpha \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{T_L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f'} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -V & 1 \end{pmatrix}}$$

III - Matrice de translation (ou d'intervalle)

C'est la matrice de transformation de la matrice colonne entre deux plans de front P et P' situés dans un même milieu homogène isotrope.



$$\left.\begin{array}{l} l' - l = \alpha.d \Rightarrow l' = 1.l + d\alpha \\ \alpha' = 0.l + 1.\alpha \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} l' \\ \alpha' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l \\ \alpha \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow T(PP') = \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

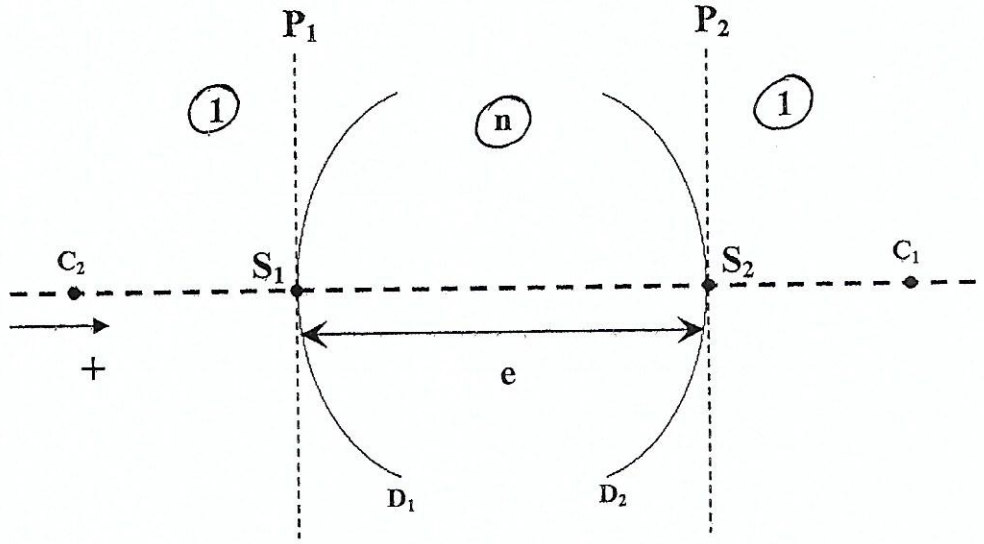
IV - Matrice de transfert d'une suite d'éléments

Soit une suite d'éléments (intervalles isotropes, dioptres, miroirs) : S_1 , S_2, ..., S_n traversés dans cet ordre par un rayon .

La matrice de transfert de cette suite d'éléments est :

$$T = T(S_n).T(S_{n-1})...T(S_2).T(S_1)$$

Exemple : Déterminons la matrice de transfert **M** d'une lentille épaisse biconvexe d'indice **n**, d'épaisseur **e** et dont les faces d'entrée et de sortie ont pour rayons respectifs $\mathbf{r_1}$ et $\mathbf{r_2}$.



$$M = R(D_2).T(P_1P_2).R(D_1)$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{1}{f_2'} & n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & e \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{1}{f_1'} & \dfrac{1}{n} \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 1-\dfrac{e}{f_1'} & \dfrac{e}{n} \\ -\dfrac{1}{f_2'}-\dfrac{1}{f_1'}\left(n-\dfrac{e}{f_2'}\right) & 1-\dfrac{e}{nf_2'} \end{pmatrix}$$

Où :

$$f_1' = \frac{n}{n-1}r_1$$

$$f_2' = \frac{1}{1-n}(-r_2) = \frac{1}{n-1}r_2$$

$$M_{21} = -\left(\frac{n}{f_1'}+\frac{1}{f_2'}-\frac{e}{n}\frac{n}{f_1'}\frac{1}{f_2'}\right) = -\left(V_1+V_2-\frac{e}{n}V_1V_2\right) = -V$$

(Formule de Gullstrand)

V – Intérêt du calcul matriciel

L'emploi des matrices permet, à partir de systèmes simples, et en faisant appel à des transformations algébriques classiques, d'étudier des systèmes optiques compliqués. Le véritable intérêt de ce mode de calcul n'apparaît pas dans l'étude des systèmes tels qu'une lentille mince ou même un doublet, car les méthodes usuelles de l'optique géométrique appliquées à ces cas simples sont aussi rapides. Par contre, le calcul matriciel s'impose lors de la transposition des résultats de l'optique lumineuse à l'optique corpusculaire.

VI – Exercice d'application : Recherche des positions des points principaux d'une lentille demi-boule

Une demi-sphère en verre d'indice $n=1,5$, de centre C, de sommet S et de rayon $R=4,5\ cm$ constitue une lentille demi-boule. La face sphérique, par laquelle la lumière pénètre dans la lentille, baigne dans l'air d'indice n_0 , tandis que la face plane baigne dans l'eau d'indice $n_1=1,33$.

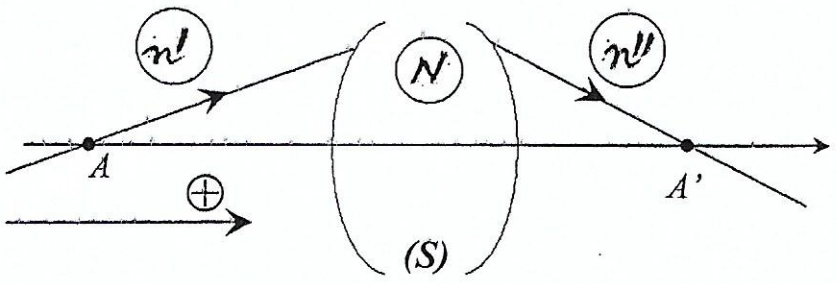
A- Méthode classique

1) Etablir, dans les conditions de stigmatisme approché, les relations de conjugaison (position et grandissement transversal) de cette lentille, l'origine étant prise au centre C.

2) Déterminer littéralement, puis numériquement, les positions (par rapport à C) des points principaux H et H' de cette lentille.

B- Méthode matricielle

1) On considère, dans les conditions de l'approximation de Gauss, le système centré dioptrique *(S)* suivant :



a) A partir de la formule de Newton : $\gamma = -f / \overline{FA} = -\overline{F'A'} / f'$, établir la relation de conjugaison liant n', n'', $\overline{HA}$, $\overline{H'A'}$ et f'. On rappelle que γ, F et F', f et f', H et H' sont respectivement le grandissement transversal, les foyers principaux (objet et

image), les distances focales (objet et image), les points principaux (objet et image) de *(S)*, et que $f / f' = -n' / n''$.

b) En déduire la matrice de transfert M entre les plans principaux π et π' de *(S)*. On prendra comme deuxième élément de la matrice colonne (d'entrée ou de sortie) l'angle α entre l'axe optique et le rayon lumineux (incident ou émergent).

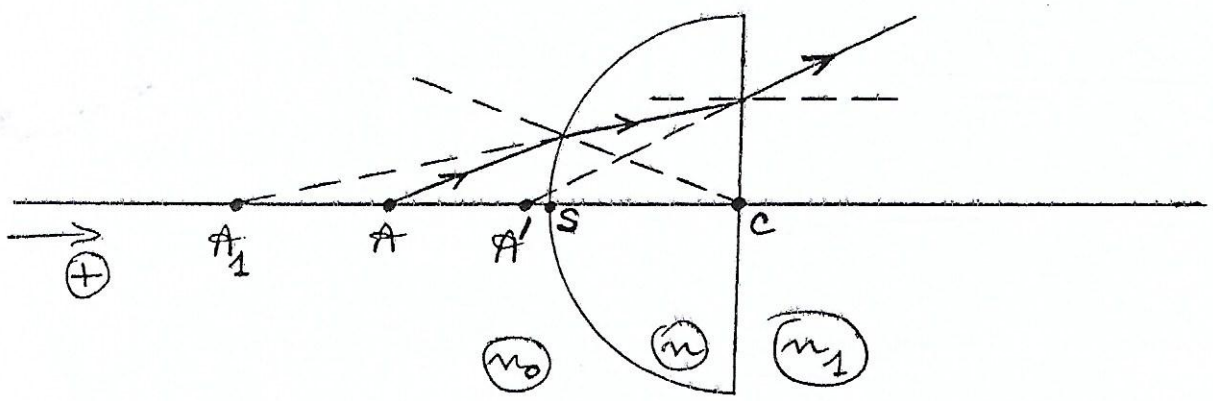
2) a) Déterminer littéralement la matrice de transfert M_L entre les plans principaux P et P' de la lentille demi-boule étudiée auparavant. On appellera *h* la distance entre P et la face d'entrée de la lentille, et *h'* la distance entre la face de sortie de la lentille et P'.

b) En déduire les distances $\overline{CH}$ et $\overline{CH'}$ séparant le centre C des points principaux H et H' de la lentille.

Corrigé de l'examen d'Optique PC1 (1ère session 95-96)

A- Méthode classique

1°/



A a pour image A_1 à travers le dioptre sphérique (n_0, n) :

$$\frac{n_0}{\overline{CA_1}} - \frac{n}{\overline{CA}} = \frac{n_0 - n}{\overline{CS}} \qquad (1)$$

A_1 a pour image A' à travers le dioptre plan (n, n_1) :

$$\frac{n}{\overline{CA_1}} = \frac{n_1}{\overline{CA'}} \qquad (2)$$

A' est l'image (finale) de A à travers la lentille :

$$(2) \Rightarrow \overline{CA_1} = \frac{n}{n_1}\overline{CA'}$$

$$(1) \Rightarrow \frac{n_0 \cdot n_1}{n\,\overline{CA'}} - \frac{n}{\overline{CA}} = \frac{n_0 - n}{\overline{CS}}$$

$$\overline{CS} = -R$$

$$\Rightarrow \frac{n_0 n_1}{\overline{CA'}} - \frac{n^2}{\overline{CA}} = \frac{n(n_0 - n)}{-R}$$

$$\boxed{\frac{n_0 \cdot n_1}{\overline{CA'}} - \frac{n^2}{\overline{CA}} = \frac{n(n - n_0)}{R}}$$

(2,5)

Soit γ_1 le grandissement transversal du dioptre sphérique et γ_2 celui du dioptre plan.

$$\gamma_1 = \frac{\overline{CA_1}}{\overline{CA}}$$

$$(2) \Rightarrow \gamma_1 = \frac{n}{n_1} \frac{\overline{CA'}}{\overline{CA}}$$

$$\gamma_2 = \frac{n}{n_1} \frac{\overline{CA'}}{\overline{CA_1}}$$

$$(2) \Rightarrow \gamma_2 = \frac{n}{n_1} \frac{n_1}{n} = 1$$

Le grandissement transversal de la lentille sera :

$$\gamma = \gamma_1 \cdot \gamma_2 = \frac{n}{n_1} \frac{\overline{CA'}}{\overline{CA}} \cdot 1$$

$$\boxed{\gamma = \frac{n}{n_1} \frac{\overline{CA'}}{\overline{CA}}} \quad (2,5)$$

2°/ H et H' sont les points d'intersection entre l'axe optique et les plans principaux P et P', qui sont des plans de front conjugués pour lesquels $\gamma = +1$.

H et H' étant conjugués par rapport à la lentille, on a :

- $\gamma = \frac{n}{n_1} \frac{\overline{CH'}}{\overline{CH}} = +1$

$$\Rightarrow \overline{CH'} = \frac{n_1}{n} \overline{CH} \qquad (3)$$

- $\frac{n_0 n_1}{\overline{CH'}} - \frac{n^2}{\overline{CH}} = \frac{n(n-n_0)}{R}$

$$(3) \Rightarrow \frac{n_0 n_1}{\overline{CH'}} = n_0 n_1 \cdot \frac{n}{n_1 \overline{CH}} = \frac{n_0 n}{\overline{CH}}$$

$$\Rightarrow \frac{n_0 n}{\overline{CH}} - \frac{n^2}{\overline{CH}} = \frac{n(n-n_0)}{R}$$

$$\Rightarrow -\frac{n(n-n_0)}{\overline{CH}} = \frac{n(n-n_0)}{R}$$

$$\Rightarrow \boxed{\overline{CH} = -R} \quad (2)$$

(3) $\Rightarrow \overline{CH'} = \frac{n_1}{n}(-R)$

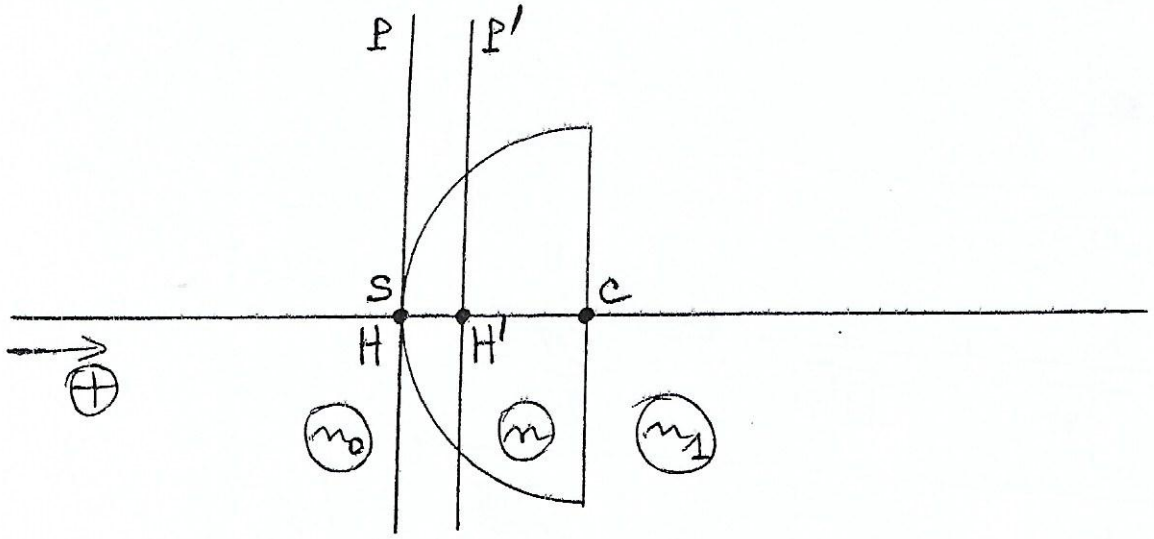
$$\boxed{\overline{CH'} = -\frac{n_1}{n} R} \quad (2)$$

A.N. :

$$\boxed{\overline{CH} = -4,5 \text{ cm}} \quad (0,5)$$

$$\overline{CH'} = -\frac{1,33}{1,5} \times 4,5$$

$$\boxed{\overline{CH'} = -3,99 \text{ cm}} \quad (0,5)$$



B – Méthode matricielle

1°/a) $\gamma = -\dfrac{f}{\overline{FA}} = -\dfrac{\overline{F'A'}}{f'}$

$\Rightarrow \overline{FA}\cdot\overline{F'A'} = ff'$

$(\overline{FH}+\overline{HA})\cdot(\overline{F'H'}+\overline{H'A'}) = ff'$

$(-f+\overline{HA})\cdot(-f'+\overline{H'A'}) = ff'$

$ff' - f\cdot\overline{H'A'} - f'\cdot\overline{HA} + \overline{HA}\cdot\overline{H'A'} = ff'$

$f\cdot\overline{H'A'} + f'\cdot\overline{HA} = \overline{HA}\cdot\overline{H'A'}$

$$\frac{f\cdot\overline{H'A'} + f'\cdot\overline{HA}}{\overline{HA}\cdot\overline{H'A'}} = \frac{\overline{HA}\cdot\overline{H'A'}}{\overline{HA}\cdot\overline{H'A'}}$$

$$\frac{f}{\overline{HA}} + \frac{f'}{\overline{H'A'}} = 1$$

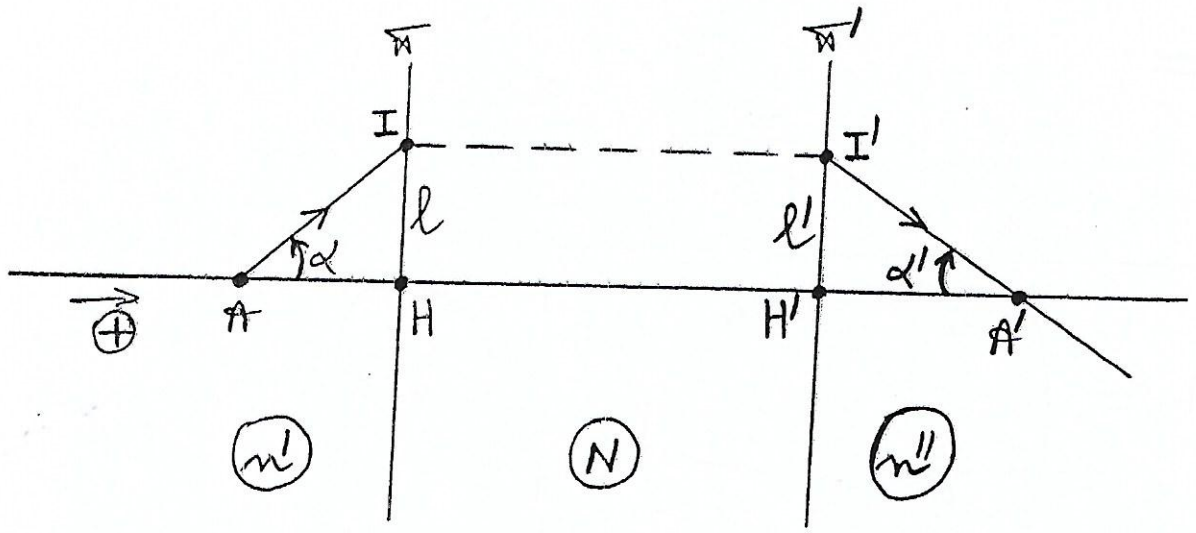
$$\frac{\left(\frac{f}{f'}\right)}{\overline{HA}} + \frac{1}{\overline{H'A'}} = \frac{1}{f'}$$

$$\frac{-\frac{n}{n''}}{\overline{HA}} + \frac{1}{\overline{H'A'}} = \frac{1}{f'}$$

$$-\frac{n}{\overline{HA}} + \frac{n''}{\overline{H'A'}} = \frac{n''}{f'}$$

$$\boxed{\frac{n''}{\overline{H'A'}} - \frac{n}{\overline{HA}} = \frac{n''}{f'}} \quad (2)$$

b)



On se place dans les conditions de l'approximation de Gauss: α et α' faibles ($\alpha \simeq \operatorname{tg}\alpha$, $\alpha' \simeq \operatorname{tg}\alpha'$).

$l' = l$

$\alpha > 0 \quad \alpha \simeq \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{l}{HA} = \dfrac{l}{-HA} \Rightarrow \dfrac{1}{HA} = -\dfrac{\alpha}{l}$

$\alpha' < 0 \quad \alpha' \simeq \operatorname{tg}\alpha' = -\dfrac{l'}{H'A'} = -\dfrac{l}{H'A'} \Rightarrow \dfrac{1}{H'A'} = -\dfrac{\alpha'}{l}$

$$\frac{n''}{H'A'} - \frac{n'}{HA} = \frac{n''}{f'}$$

$$-n''\frac{\alpha'}{l} + n'\frac{\alpha}{l} = \frac{n''}{f'}$$

$$-\frac{n''}{l}\alpha' = \frac{n''}{f'} - \frac{n'}{l}\alpha$$

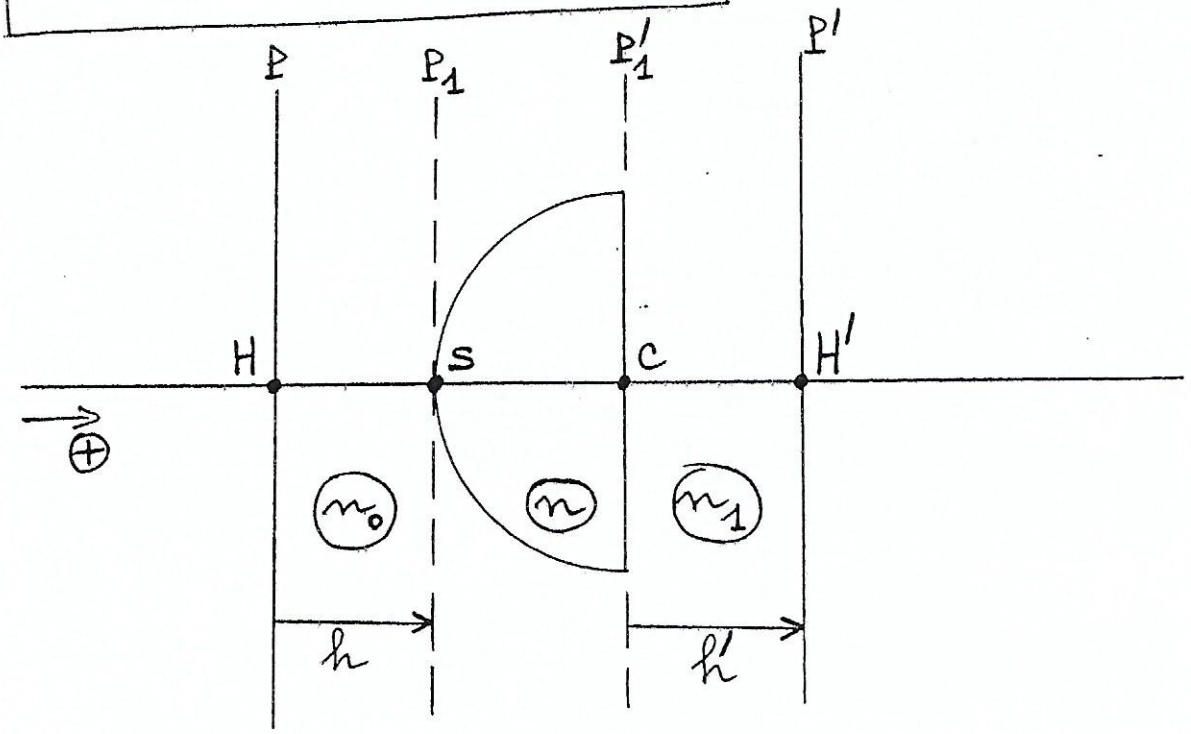
$$\alpha' = -\frac{1}{f'}l + \frac{n'}{n''}\alpha$$

$$\Rightarrow \begin{cases} l' = 1.\,l + 0.\,\alpha \\ \alpha' = -\dfrac{1}{f'}l + \dfrac{n'}{n''}\alpha \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} \ell' \\ \alpha' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f'} & \frac{n'}{n''} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \ell \\ \alpha \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f'} & \frac{n'}{n''} \end{pmatrix}} \quad (2)$$

2°/a)



Posons :

- $T(PP_1)$ = matrice de translation entre le plan principal objet P et le plan de front P_1 passant par S.

$$T(PP_1) = \begin{pmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- $T(P_1P'_1)$ = matrice de translation entre le plan de front P_1 passant par S et le plan de front P'_1 passant par C.

$$T(P_1P'_1) = \begin{pmatrix} 1 & R \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- $T(P_1' P')$ = matrice de translation entre le plan de front P_1' passant par C et le plan principal image P'.

$$T(P_1' P') = \begin{pmatrix} 1 & h' \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- R_s = matrice de réfraction du dioptre sphérique.

$$R_s = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f_s'} & \frac{n_0}{n} \end{pmatrix}$$

où : f_s' = distance focale image du dioptre sphérique

$$f_s' = \frac{n}{n - n_0} \overline{SC} = \frac{n}{n - n_0} R$$

- R_p = matrice de réfraction du dioptre plan.

$$R_p = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{n}{n_1} \end{pmatrix}$$

On a alors :

$$M_L = T(P_1' P') \cdot R_p \cdot T(P_1 P_1') \cdot R_s \cdot T(P P_1)$$

$$M_L = \begin{pmatrix} 1 & h' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{n}{n_1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & R \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f_s'} & \frac{n_0}{n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_L = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{f_s'}\left(R + h'\frac{n}{n_1}\right) & h\left[1 - \frac{1}{f_s'}\left(R + h'\frac{n}{n_1}\right)\right] + \frac{n_0}{n}\left(R + h'\frac{n}{n_1}\right) \\ -\frac{n}{n_1} \cdot \frac{1}{f_s'} & -\frac{n}{n_1}\frac{h}{f_s'} + \frac{n_0}{n_1} \end{pmatrix}$$

3) $$M_L = \begin{pmatrix} 1-\left(\frac{n-n_0}{n}\right)\left(1+\frac{n}{n_1}\frac{h'}{R}\right) & h\left[1-\left(\frac{n-n_0}{n}\right)\left(1+\frac{n}{n_1}\frac{h'}{R}\right)\right] + \frac{n_0}{n}\left(R+h'\frac{n}{n_1}\right) \\ -\left(\frac{n-n_0}{n_1 R}\right) & -\left(\frac{n-n_0}{n_1}\right)\left(\frac{h}{R}\right)+\frac{n_0}{n_1} \end{pmatrix}$$

b) D'après B – 1°/ b) : $M_L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f'} & \frac{n_0}{n_1} \end{pmatrix}$, où f' est la distance focale image de la lentille demi-boule.

Donc on a :

- $-\left(\frac{n-n_0}{n_1}\right)\left(\frac{h}{R}\right)+\frac{n_0}{n_1} = \frac{n_0}{n_1}$

$\left(\frac{n-n_0}{n_1 R}\right) h = 0$

$\left(\frac{n-n_0}{n_1 R}\right) \neq 0$

$\Rightarrow h = 0$

$\overline{CH} = \overline{CS} + \overline{SH} = -R - h = -4,5 - 0$

$\boxed{\overline{CH} = -4,5 \text{ cm}}$ (1,5)

- $1-\left(\frac{n-n_0}{n}\right)\left(1+\frac{n}{n_1}\frac{h'}{R}\right) = 1$

$\left(\frac{n-n_0}{n}\right)\left(1+\frac{n}{n_1}\frac{h'}{R}\right) = 0$

$\left(\frac{n-n_0}{n}\right) \neq 0$

$\Rightarrow 1+\frac{n}{n_1}\frac{h'}{R} = 0$

$$\left(\frac{n}{n_1 R}\right) h' = -1$$

$$h' = -\frac{n_1 R}{n}$$

$$\overline{CH'} = h' = -\frac{n_1 R}{n} = -\frac{1,33}{1,5} \times 4,5$$

$$\boxed{\overline{CH'} = -3,99 \text{ cm}} \quad (1,5)$$