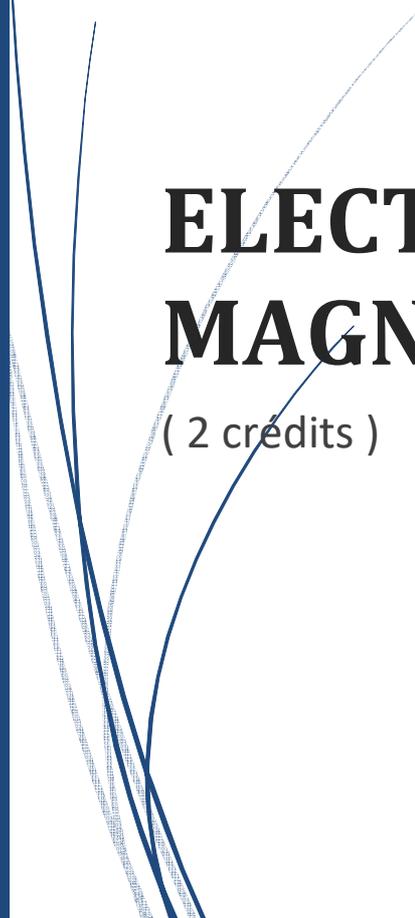


Année Académique  
2023-2024

**UE PHY 3100**  
**ELECTRICITE GENERALE**  
**(5 crédits)**



**ELECTROSTATIQUE -**  
**MAGNETOSTATIQUE**  
( 2 crédits )

Enseignant  
SORO Kadiolotien



# SOMMAIRE

RAPPELS MATHEMATIQUES .....	8
1. Champ scalaire et champ vectoriel .....	8
1.1. Champ scalaire.....	8
1.2. Champ vectoriel.....	8
2. Eléments d'analyse vectorielle.....	8
2.1. Vecteurs unitaires.....	8
2.2. Repère orthonormé .....	8
2.3. Systèmes de coordonnées.....	8
3. Flux d'un champ de vecteurs .....	10
3.1. Intégrales multiples .....	10
3.2. Définition du flux d'un champ de vecteurs .....	11
3.3. Orientation de la normale .....	11
4. Quelques operateurs mathématiques.....	11
4.1. Opérateur nabla ou gradient .....	11
4.2. Circulation d'un gradient.....	12
4.3. Opérateur divergence.....	12
4.4. Opérateur rotationnel .....	12
4.5. Opérateur laplacien scalaire .....	13
CHAPITRE 1 : CHARGE ELECTRIQUE.....	14
1. Distributions des charges.....	14
1.1 Charge ponctuelle.....	14
1.2 Charges ponctuelles discrètes .....	14
1.3 Distribution continue de charges .....	14

2 Applications.....	15
CHAPITRE 2 : CHAMP ELECTROSTATIQUE .....	17
1. Loi de Coulomb .....	17
1.1 Définition .....	17
1.2 Principe de superposition .....	18
2. Expression du champ électrostatique $\vec{E}$ .....	19
2.1 Champ électrostatique créé par une charge ponctuelle .....	19
2.2 Champ électrostatique créé par un ensemble de charges ponctuelles .....	20
2.3 Champ créé par une distribution continue de charges .....	20
3. Lignes et tubes de champ.....	21
3.1 Lignes de champ .....	21
3.2 Tube de champ .....	22
4. Propriétés de symétrie du champ électrostatique .....	22
4.1 Principe de Curie.....	22
4.2 Plan de symétrie $\pi$ de la distribution de charges .....	22
4.3 Plan de symétrie-inversion $\sigma^*$ (ou plan d'antisymétrie) de la distribution de charges .....	23
4.4 Règles d'invariances et de symétries.....	24
6. Théorème de GAUSS .....	25
6.1 Notion de surface orientée .....	25
6.2 Flux d'un vecteur champ à travers une surface fermée .....	25
6.3 Notion d'angle solide .....	26
6.4 Flux du champ électrostatique - Théorème de GAUSS.....	28
7. Applications.....	29
CHAPITRE 3 : POTENTIEL ELECTROSTATIQUE.....	33
1. Circulation du vecteur champ électrique $\vec{E}$ .....	33

2. Calcul de $C_{AB}$ .....	33
3. Potentiel électrostatique .....	34
4. Relation entre potentiel électrostatique $V$ et champ $\vec{E}$ .....	34
4.1 Notion de gradient.....	34
4.2 Gradient et différentielle.....	35
4.3 Relation entre le potentiel $V$ et le champ $\vec{E}$ .....	35
5. Surfaces équipotentielles; lignes de champ.....	36
5.1 Surface équipotentielle.....	36
5.2 Lignes de champ .....	36
5.3 Lignes de champ et surface équipotentielle.....	36
6. Relation de passage .....	36
7. Équation de POISSON.....	37
CHAPITRE 4 : ENERGIE ELECTROSTATIQUE .....	40
1. Charge ponctuelle dans un champ $\vec{E}$ extérieur.....	40
2. Énergie potentielle d'interaction d'un système de charges .....	41
2.1 Cas d'un système de deux charges ponctuelles .....	41
2.2 Cas d'un système de trois charges ponctuelles $q_1, q_2, q_3$ .....	41
2.3 Cas d'un système de $n$ charges ponctuelles .....	42
3. Energie électrostatique d'une distribution continue de charges .....	42
4. Expression de l'énergie électrostatique en fonction du champ $\vec{E}$ .....	43
CHAPITRE 5 : DIPOLE ELECTROSTATIQUE.....	44
1. Définitions .....	44
1.1 Dipôle électrostatique .....	44
1.2 Moment dipolaire.....	44

2. Potentiel $V(M)$ créé par un dipôle à grande distance ( $d \ll r$ ) .....	44
3. Calcul du champ $\vec{E}$ (M) à grande distance .....	46
CHAPITRE 6 : MAGNETOSTATIQUE .....	48
1. Vecteur champ magnétique $\vec{B}$ .....	48
1.1 Notion de champ magnétique .....	48
1.2 Interprétation des deux expériences.....	49
1.3 Vecteur champ magnétique $\vec{B}$ .....	49
1.4 Champ magnétique créé par une charge en mouvement.....	49
2. Champ magnétique créé par un élément de courant.....	49
3. Symétrie de la distribution de courant .....	50
4. Champs magnétiques créés par des circuits simples.....	51
4.1 Circuit rectiligne infiniment long .....	51
4.2 Circuit rectiligne de longueur finie .....	51
4.3 Spire circulaire .....	52
4.4 Champ magnétique d'un solénoïde en un point de son axe.....	54
5. Propriétés fondamentales du champ magnétique $\vec{B}$ .....	55
6. Circulation du vecteur $\vec{B}$ le long d'une courbe fermée.....	55
6.1 Théorème d'Ampère.....	55
6.2 Forme locale du théorème d'Ampère .....	56
7. Force de LAPLACE.....	56
8. Force de LORENTZ ou Force Electrostatique .....	56



# RAPPELS MATHÉMATIQUES

## 1. Champ scalaire et champ vectoriel

En physique, on distingue 2 types de grandeurs appelées champ scalaire ou champ vectoriel

### 1.1. Champ scalaire

Soit M un point de l'espace de coordonnées  $(x, y, z)$  dans un repère  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

Un champ scalaire ou champ de scalaires est une fonction à plusieurs variables qui associe à un point M de l'espace un scalaire  $f(x, y, z)$ .

Ex : Champ des températures, champ des pressions, champ des masses volumiques

### 1.2. Champ vectoriel

Un champ vectoriel ou champ de vecteurs est une fonction vectorielle à plusieurs variables qui à chaque point M de l'espace, fait correspondre un vecteur  $\vec{V}(M) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

Ex : le champ des vitesses des points d'un corps en mouvement.

## 2. Éléments d'analyse vectorielle

### 2.1. Vecteurs unitaires

Dans un espace vectoriel normé, un vecteur  $\vec{u}$  est unitaire lorsque sa norme vaut 1. On note :  $\|\vec{u}\| = 1$

Tout vecteur  $\vec{v}$  admet un vecteur unitaire  $\vec{u}$  colinéaire, de même sens que  $\vec{v}$  tel que  $\vec{u} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$

### 2.2. Repère orthonormé

Un repère  $R = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  est orthonormé lorsque les vecteurs de la base  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  sont unitaires et orthogonaux deux à deux. Pour un point  $M(x, y, z)$  dans un repère orthonormé, la distance

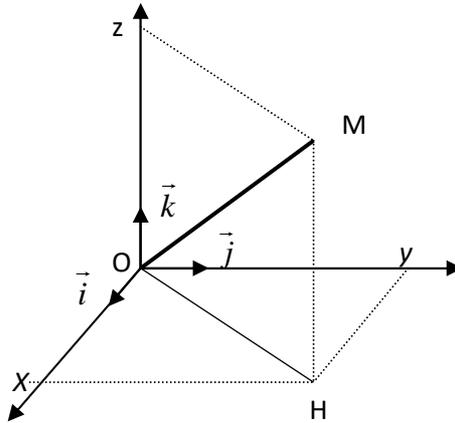
$$OM = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} .$$

### 2.3. Systèmes de coordonnées

Les trois systèmes de coordonnées souvent utilisés en physique sont : les coordonnées cartésiennes, les coordonnées cylindriques et les coordonnées sphériques.

#### 2.3.1. Les coordonnées cartésiennes

M est repéré par ses coordonnées  $x, y, z$  telles que



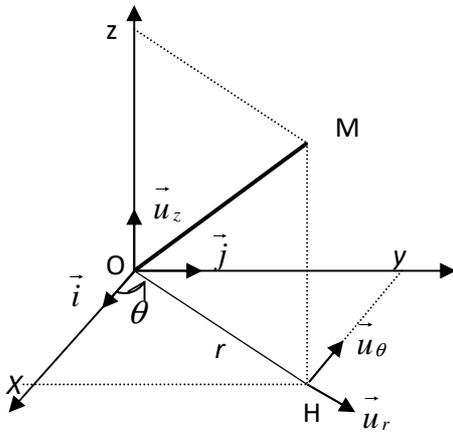
$$\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

Lorsque  $x$ ,  $y$ , et  $z$  subissent une variation élémentaire

$dx$ ,  $dy$  ou  $dz$ , le point M engendre un volume élémentaire

$$dv = dx.dy.dz$$

### 2.3.2. Les coordonnées cylindriques $(r, \theta, z)$



M est repéré par ses coordonnées  $(r, \theta, z)$ ,

$r =$  distance  $(Oz, M)$ ,  $r > 0$

$\theta =$  position de M autour de  $(Oz)$ ,  $\theta \in [0, 2\pi]$

$z =$  cote du point M

$H =$  projection orthogonale de M sur le plan  $(xOy)$

Dans la base  $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ , on a  $\vec{OM} = r\vec{u}_r + z\vec{u}_z$

Pour des variations élémentaires  $dr$ ,  $d\theta$  ou  $dz$ , le point M se déplace de  $M'$  respectivement de  $dr\vec{u}_r$ ,  $r d\theta\vec{u}_\theta$  ou  $dz\vec{u}_z$ . Ainsi un volume élémentaire s'écrit :  $dv = dr.r d\theta.dz = r.dr.d\theta.dz$

Formules de passage entre coordonnées cartésiennes et coordonnées cylindriques :

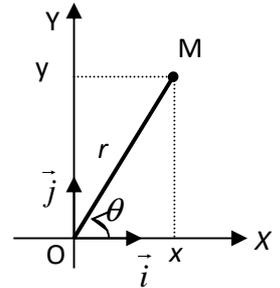
$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \arctan \frac{y}{x} \\ z = z \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{cases}$$

### 2.3.3 Coordonnées polaires $(r, \theta)$

Elles sont utilisées dans le plan. Le point M est repéré par  $r$  et  $\theta$  respectivement appelés coordonnée radiale ou rayon et coordonnée angulaire ou angle polaire ou azimut.

Formules de passage entre coordonnées cartésiennes et coordonnées polaires :

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \arctan \frac{y}{x} \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$



### 2.3.4. Coordonnées sphériques $(r, \theta, \phi)$

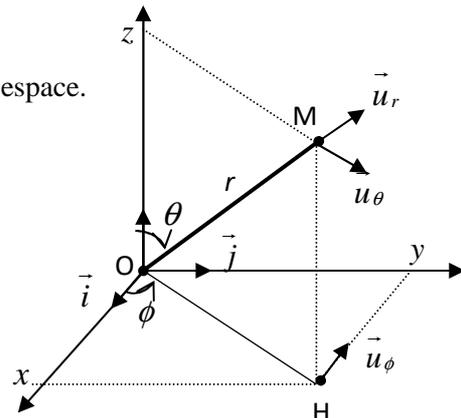
Elles sont une généralisation des coordonnées polaires dans l'espace.

Le point M est repéré par  $(r, \theta, \phi)$  où :

$r =$  distance OM,  $r > 0$

$\theta$  et  $\phi$  définissent la direction dans laquelle, depuis le point O, on voit le point M.

$\phi$  tourne autour de  $Oz$  ; d'où  $\phi \in [0, 2\pi]$  et  $\theta \in [0, \pi]$



Dans le repère  $(O, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\phi)$ , la position du point M est donnée par  $\vec{OM} = r \vec{u}_r$ .

Pour des variations élémentaires de  $r$ ,  $\theta$  ou  $\phi$ , M se déplace respectivement de  $dr \vec{u}_r$ ,  $r d\theta \vec{u}_\theta$  ou  $r \sin \theta d\phi \vec{u}_\phi$ . Donc un volume élémentaire en coordonnées sphériques sera :

$$dv = dr \cdot r d\theta \cdot r \sin \theta d\phi = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$$

$$\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} x & x' & \vec{i} \\ y & y' & \vec{j} \\ z & z' & \vec{k} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} \vec{k}$$

## 3. Flux d'un champ de vecteurs

### 3.1. Intégrales multiples

On a une intégrale multiple lorsqu'on intègre sur surface ou un volume.

Lorsque la fonction à intégrer est un produit de fonctions de chacune des coordonnées et que les bornes d'intégration de chaque coordonnée sont indépendantes des autres coordonnées, alors l'intégrale multiple est égal au produit des intégrales simples.

L'application du théorème de Fubini donne alors :

$$\iiint f(x)g(y)h(z)dxdydz = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx \cdot \int_{y_0}^{y_1} g(y)dy \cdot \int_{z_0}^{z_1} h(z)dz$$

### 3.2. Définition du flux d'un champ de vecteurs

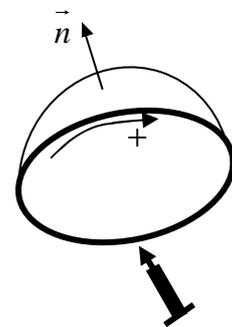
Soit  $\vec{W}$  un champ de vecteurs et S une surface. Le flux de  $\vec{W}$  à travers S s'écrit :  $\Phi = \iint_S \vec{W} \cdot d\vec{S}$  où  $d\vec{S} = \vec{n} \cdot dS$  est le vecteur surface élémentaire orienté par le vecteur normal unitaire  $\vec{n}$  à  $d\vec{S}$ .

L'orientation de  $\vec{n}$  dépend de la nature de la surface considérée.

### 3.3. Orientation de la normale

- Si la surface est fermée, par convention  $\vec{n}$  est sortant et on écrit :  $\Phi = \oiint_S \vec{W} \cdot d\vec{S} = \oiint_S \vec{W} \cdot \vec{n} dS$

- Si la surface est ouverte, elle s'appuie nécessairement sur un contour fermé auquel on donnera un sens arbitraire positif. Le sens de la normale  $\vec{n}$  est obtenu en appliquant le règle du tire-bouchon.



## 4. Quelques opérateurs mathématiques

### 4.1. Opérateur nabla ou gradient

L'opérateur gradient transforme une grandeur scalaire en grandeur vectorielle.

Le gradient d'un champ de scalaire  $f$  est défini tel que, pour tout déplacement élémentaire  $d\vec{l}$ , on a :

$$\overrightarrow{\text{grad}} f \cdot d\vec{l} = df \text{ où } df \text{ est la différentielle totale de } f.$$

- En coordonnées cartésiennes :  $\overrightarrow{\text{grad}} f = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k}$

Lorsqu'on pose  $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}$  appelé « opérateur nabla », on a :  $\overrightarrow{\text{grad}} f = \vec{\nabla} f$

- En coordonnées cylindrique  $(r, \theta, z)$  :  $\overrightarrow{\text{grad}} f = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{\partial f}{r \partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{u}_z$

- En coordonnées sphériques  $(r, \theta, \phi)$  :  $\overrightarrow{\text{grad}} f = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{\partial f}{r \partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} \vec{u}_\phi$

## 4.2. Circulation d'un gradient

La circulation d'un champ de vecteur  $\vec{W}$  le long d'un chemin  $\Gamma$  s'écrit :  $C = \int_{\Gamma} \vec{W} \cdot d\vec{l}$  où  $d\vec{l}$  est un élément de longueur du chemin. Ainsi donc, la circulation  $C$  du gradient d'un champ de scalaires  $f$  (qui est un vecteur) entre deux points A et B sera :

$$C = \int_A^B \overrightarrow{\text{grad}} f \cdot d\vec{l} = \int_A^B df = f(B) - f(A).$$

Cette circulation ne dépend pas du chemin suivi, mais seulement de la valeur de  $f$  aux points A et B.

Lorsque la circulation d'un champ de  $\vec{W}$  ne dépend pas du chemin suivi, mais seulement des points de départ et d'arrivée, ce champ de vecteur est dit « à circulation conservative ».

Propriété : Lorsqu'un champ de vecteur  $\vec{W}$  est à flux conservatif alors il existe une fonction scalaire  $f$  dont ce champ est le gradient :  $\vec{W} = -\overrightarrow{\text{grad}} f$

## 4.3. Opérateur divergence

La divergence d'un champ de vecteur  $\vec{W}$  est un scalaire. On note :  $\text{div} \vec{W}$

- En coordonnées cartésiennes  $(x, y, z)$  :  $\text{div} \vec{W} = \frac{\partial W_x}{\partial x} + \frac{\partial W_y}{\partial y} + \frac{\partial W_z}{\partial z} = \vec{\nabla} \cdot \vec{W}$

- En coordonnées cylindrique  $(r, \theta, z)$  :  $\text{div} \vec{W} = \frac{\partial(rW_r)}{r\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial W_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial W_z}{\partial z}$

- En coordonnées cylindrique  $(r, \theta, z)$  :  $\text{div} \vec{W} = \frac{\partial(r^2 W_r)}{r^2 \partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(W_\theta \sin \theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial W_\phi}{\partial \phi}$

*Formule d'Ostrogradsky*

Le flux d'un champ  $\vec{W}$  à travers une surface fermée  $S$  est égal à l'intégrale de la divergence de ce champ sur le volume  $V$  délimité par cette surface. On écrit :

$$\oiint_S \vec{W} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \text{div} \vec{W} dV$$

## 4.4. Opérateur rotationnel

Le rotationnel est un vecteur obtenu à partir d'un champ de vecteurs.

- En coordonnées cartésiennes  $(x, y, z)$  :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{W} = \vec{\nabla} \wedge \vec{W}$$

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{W} = \left( \frac{\partial W_z}{\partial y} - \frac{\partial W_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left( \frac{\partial W_x}{\partial z} - \frac{\partial W_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left( \frac{\partial W_y}{\partial x} - \frac{\partial W_x}{\partial y} \right) \vec{k}$$

*Formule de Stokes*

La circulation d'un champ de vecteurs  $\vec{W}$  le long d'un contour  $\Gamma$  est égal au flux de son rotationnel à travers toute surface ouverte  $S$  s'appuyant sur ce contour :

$$\oint_{\Gamma} \vec{W} \cdot d\vec{l} = \iint_S \text{rot } \vec{W} \cdot d\vec{S}$$

Remarque : Un champ de vecteurs est à circulation conservative si et seulement si en tout point de l'espace,  $\text{rot } \vec{W} = \vec{0}$

#### 4.5. Opérateur laplacien scalaire

Le laplacien scalaire est un opérateur de dérivation spatiale qui s'applique à un champ de scalaires pour donner un scalaire :

$$\Delta V = \text{div}(\text{grad } V) = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} V = \vec{\nabla}^2 V$$

En coordonnées cartésiennes :  $\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$

# CHAPITRE 1 : CHARGE ELECTRIQUE

## 1. Distributions des charges

### 1.1 Charge ponctuelle

Une charge est ponctuelle si l'objet qui la porte est assimilable à un point matériel.

### 1.2 Charges ponctuelles discrètes

Un ensemble formé de plusieurs charges ponctuelles fixes  $q_1, q_2, q_3, \dots$  dans un volume  $V$  est dit charges ponctuelles discrètes.

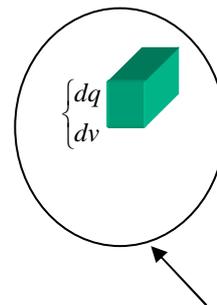
### 1.3 Distribution continue de charges

#### 1.3.1 Densité volumique de charges

Soit un objet de volume  $V$  chargé en électricité. On définit la quantité  $\rho = \frac{dq}{dv}$  comme étant la densité volumique de charges avec  $dq$  = élément de charges et  $dv$  élément de volume.

$$\rho = \frac{dq}{dv} \Rightarrow dq = \rho dv \Rightarrow q = \iiint_V \rho dv, \text{ est la charge contenue dans}$$

le volume  $V$  et  $\rho$  a pour unité :  $C/m^3$  ou  $C \cdot m^{-3}$



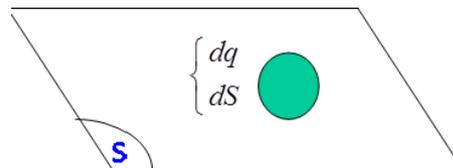
**volume V**

#### 1.3.2 Densité surfacique de charges

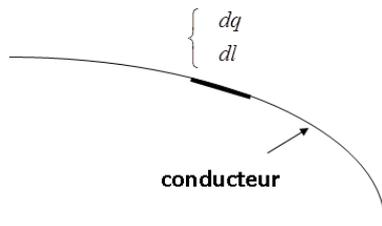
Soit un objet, ayant uniquement des charges à sa surface. On définit la grandeur  $\sigma = \frac{dq}{dS}$  comme étant la densité surfacique de charges.

$dq$  : élément de charges ;  $dS$  : élément de surface  $\Rightarrow \sigma$  a pour unité :  $C/m^2$

$$\sigma = \frac{dq}{dS} \Rightarrow dq = \sigma ds \Rightarrow q = \iint_s \sigma ds$$



### 1.3.3 Densité linéique de charges



Si des charges sont réparties sur une ligne uniquement

(à savoir un conducteur de section très faible par rapport à la longueur),

on définit la grandeur  $\lambda = \frac{dq}{dl}$  comme étant la densité linéique de charges.

L'unité de  $\lambda$  est : **C/m**.

$$\lambda = \frac{dq}{dl} \Rightarrow dq = \lambda dl \Rightarrow q = \int \lambda dl$$

## 2 Applications

### 2.1 Exercice 1

La charge volumique électronique dans l'atome d'hydrogène (H) peut être représentée par

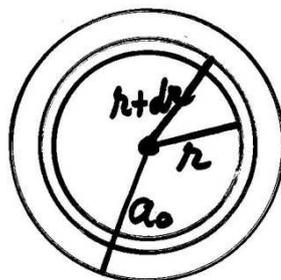
l'expression:  $\rho(r) = C \exp\left(-\frac{2r}{a_0}\right)$ .

Où  $a_0 = 52,9 \text{ pm}$  est le rayon de Bohr et  $r$  la distance du point considéré au centre de l'atome.

Calculer  $C$  pour que  $\rho$  caractérise bien la distribution de charge  $-e$  de l'électron.

### Solution

Le nuage électronique est assimilé à une sphère selon le modèle de Bohr.



Le nuage ne se limite pas à  $a_0$  !!!

Toute rotation autour d'un axe radial ne modifie pas  $\rho(r)$ : Nous avons un problème à symétrie sphérique.

$dV = 4\pi r^2 dr$  : volume d'une coquille de rayon et d'épaisseur  $dr$

$$dQ = 4\pi r^2 \rho(r) dr$$

$$dQ = 4\pi C r^2 \exp\left(-\frac{2r}{a_0}\right) dr$$

La condition imposée est:  $-e = 4\pi C \int_0^{+\infty} r^2 \exp\left(-\frac{2r}{a_0}\right) dr$

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} r^2 \exp\left(-\frac{2r}{a_0}\right) dr &= \int_0^{+\infty} r^2 d\left(-\frac{a_0}{2} \exp\left(-\frac{2r}{a_0}\right)\right) \\ &= \left[ r^2 \left(-\frac{a_0}{2} \exp\left(-\frac{2r}{a_0}\right)\right) \right]_0^{+\infty} + a_0 \int_0^{+\infty} r \exp\left(-\frac{2r}{a_0}\right) dr \\ &= a_0 \int_0^{+\infty} r d\left(-\frac{a_0}{2} \exp\left(-\frac{2r}{a_0}\right)\right) \\ &= a_0 \left[ r \left(-\frac{a_0}{2} \exp\left(-\frac{2r}{a_0}\right)\right) \right]_0^{+\infty} + \frac{a_0^2}{2} \int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{2r}{a_0}\right) dr \\ &= \frac{a_0^2}{2} \int_0^{+\infty} d\left(-\frac{a_0}{2} \exp\left(-\frac{2r}{a_0}\right)\right) \\ &= \frac{a_0^3}{4} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow -e = 4\pi C \frac{a_0^3}{4} \quad \rightarrow \quad C = -\frac{e}{\pi a_0^3}$$

# CHAPITRE 2 : CHAMP ELECTROSTATIQUE

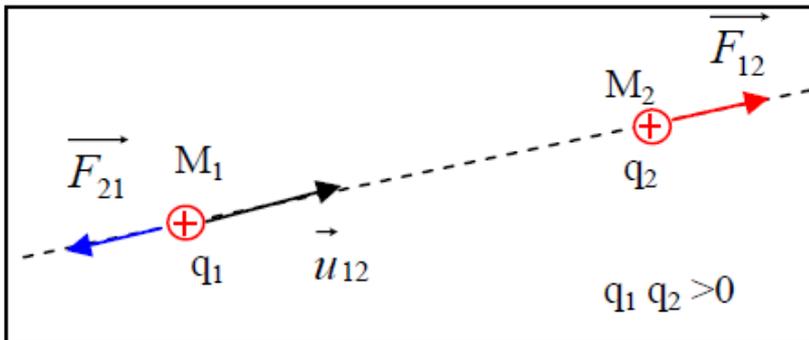
Terme du à FARADAY M.

« La distribution de la limaille de fer au voisinage d'un aimant indique qu'une particule pouvait donner à l'espace environnant l'aspect d'un champ labouré.

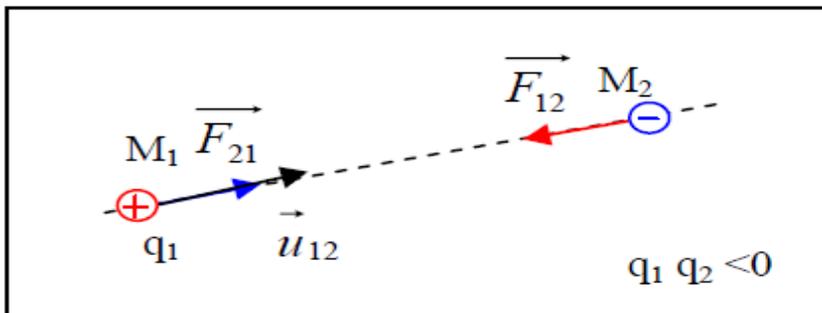
## 1. Loi de Coulomb

Il existe une interaction entre deux corps électrisés.

- Si les charges électriques de deux corps  $M_1$  et  $M_2$  sont de même signe, on observe une répulsion entre  $M_1$  et  $M_2$ .



- Si les charges électriques de deux corps  $M_1$  et  $M_2$  sont de signes opposés, on observe une attraction entre  $M_1$  et  $M_2$ .



### 1.1 Définition

On appelle forces électrostatiques ou forces coulombiennes les forces d'interaction entre les corps électrisés  $M_1$  et  $M_2$ .

La force de Coulomb vérifie le principe d'action-réaction:

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -\vec{F}_{2 \rightarrow 1} = K \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{U}$$
 avec  $r = M_1 M_2$  et  $K = \frac{1}{4\pi\epsilon}$

La constante  $K$  dépend du milieu où se trouvent les charges

Dans le vide  $\epsilon = \epsilon_0$  : permittivité absolue du vide ;

$$\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi \cdot 10^9} \text{ C}^2 \text{ N}^{-1} \text{ m}^{-2} \quad [\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ (S.I.) ou (F/m)}] \quad ;$$

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \cdot 10^9 \text{ (S.I.) (Nm}^2\text{C}^{-2}\text{) ou (Kgm}^3\text{s}^{-2}\text{C}^{-2}\text{)}$$

### Remarque

a/  $\vec{r} = r\vec{U} \Rightarrow \frac{\vec{r}}{r} = \vec{U}$  . On a donc  $\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{U}$

$\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$  avec  $\epsilon_r =$  permittivité relative.

b/ Si le milieu n'est pas le vide, on introduit la permittivité absolue du milieu.

Citons quelques valeurs de  $\epsilon_r$  :

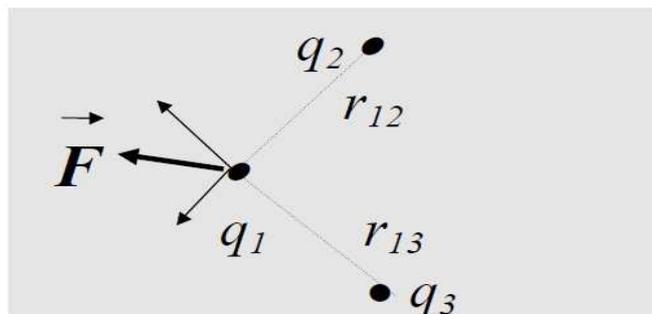
Substance	Air	Eau	Ammoniaque	Paraffine
$\epsilon_r$	1,0006	80	22	2,1

L'électrostatique dans le vide s'identifie à l'électrostatique dans l'air.

### 1.2 Principe de superposition

Les forces électrostatiques exercées par les charges électriques  $q_2, q_3, \dots$  sur une charge  $q_1$  se calculent indépendamment l'une de l'autre et s'ajoutent vectoriellement.

$$\vec{F} = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13}$$



En général, la force  $\vec{F}$  exercée sur la charge  $q_1$  par l'ensemble des charges  $q_i$  est égale à la somme vectorielle des forces  $\vec{F}_i$ , avec  $\vec{F}_{1i}$  force exercée par la charge  $q_i$  sur  $q_1$  :  $\vec{F} = \sum_i \vec{F}_{1i}$

## 2. Expression du champ électrostatique $\vec{E}$

a) Soit une région D de l'espace. Il existe dans D, un vecteur champ électrostatique si une charge électrique placée en un point quelconque de cet espace est soumise à une force de nature électrostatique.

b) Soit  $\vec{E}$  ce champ dans D. En un point M de cet espace plaçons une charge  $q'$ . Cette charge est soumise à  $\vec{F}'$ , une force électrostatique. Remplaçons  $q'$  par  $q''$  on observe une force  $\vec{F}''$ .

Expérimentalement, on remarque que :  $\frac{\vec{F}'}{q'} = \frac{\vec{F}''}{q''} \Rightarrow \frac{\vec{F}'}{q'} = \frac{\vec{F}''}{q''} = \dots = \text{constante}$ .

Cette constante est  $\vec{E}$ , le champ électrostatique qui existe dans D.

Le champ électrostatique  $\vec{E}$  est causé par la présence d'une distribution de charges électriques  $q_i$  immobiles, et se manifeste par la force  $\vec{F}$  qu'il exerce sur une charge électrique  $q$ .

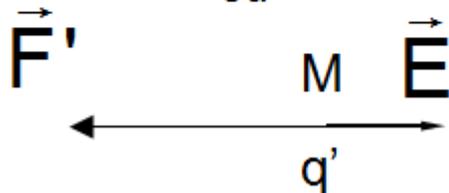
Si l'on place une charge  $q'$  en M, elle subit une force  $\vec{F}'$ . Donc

$$\frac{\vec{F}'}{q'} = \vec{E} \Rightarrow \vec{F}' = q' \vec{E}$$

$$\vec{F}' = q' \vec{E} \text{ ici } q' > 0$$



ou



$$\vec{F}' = q' \vec{E} \text{ ici } q' < 0$$

### 2.1 Champ électrostatique créé par une charge ponctuelle



(1)

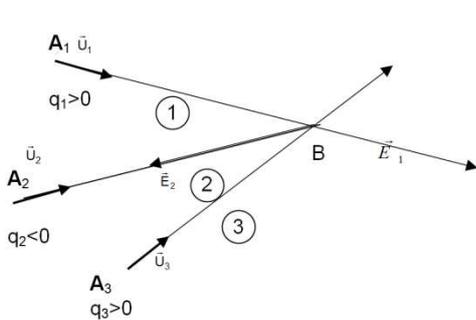
$$\vec{F}_{A \rightarrow B} = \frac{qq'\vec{U}}{4\pi\epsilon_0 r^2} = q'\vec{E} \quad (2) \quad \Rightarrow \quad \vec{E} = \frac{q\vec{U}}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (3)$$

$\vec{E}$  est le champ électrostatique créé en B par la charge q positionnée en A.

### Remarque

- (1) - Si  $q > 0 \Rightarrow \vec{E}$  et  $\vec{U}$  de même sens ;  
 - Si  $q < 0 \Rightarrow \vec{E}$  et  $\vec{U}$  de sens contraire.
- (2) La relation qui donne  $\vec{E}$  ne permet pas de le calculer quand  $r \rightarrow 0$ . Dans ce cas la charge n'est plus assimilable à une charge ponctuelle.

## 2.2 Champ électrostatique créé par un ensemble de charges ponctuelles

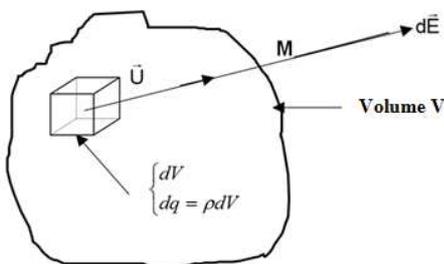


$$\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i \vec{U}_i}{r_i^2}$$

$\vec{E}$  est la somme vectorielle des champs  $\vec{E}_i$  créés par chaque charge  $q_i$  au point B.

## 2.3 Champ créé par une distribution continue de charges

### 2.3.1 Distribution volumique de charges

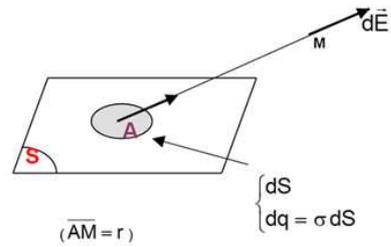


$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho dV}{r^2} \vec{U} \Rightarrow \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \frac{\rho dV}{r^2} \vec{U} \quad \text{qui est le champ créé au point M par la charge totale contenue dans le volume V.}$$

### 2.3.2 Distribution surfacique de charges

Pour une distribution surfacique, nous avons

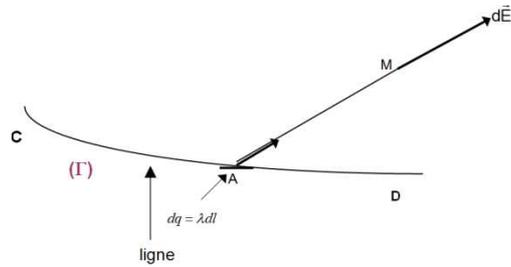
$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma dS}{r^2} \vec{U} \Rightarrow \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_S \frac{\sigma dS}{r^2} \vec{U}$$



### 2.3.3 Distribution linéique de charges

$$r = AM ;$$

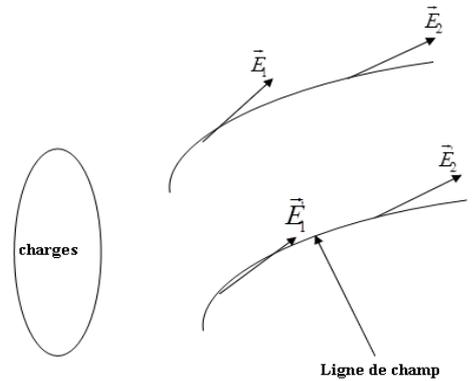
$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dl}{r^2} \vec{U} \Rightarrow \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{(\Gamma)} \frac{\lambda dl}{r^2} \vec{U}$$



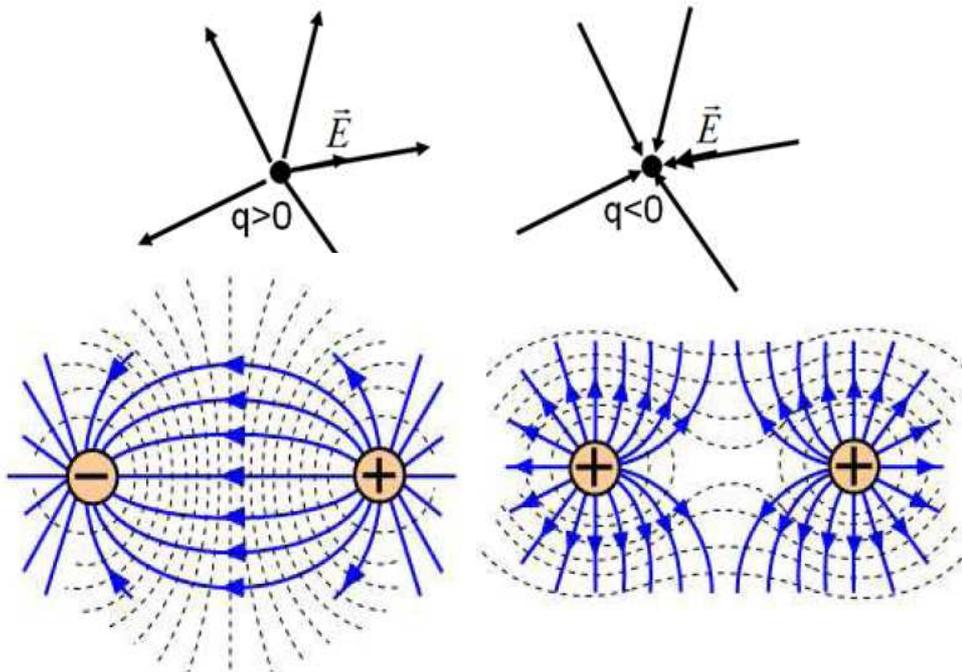
## 3. Lignes et tubes de champ

### 3.1 Lignes de champ

Ce sont les courbes orientées tangentes en chacun de leurs points au vecteur champ en ce point. L'orientation indique le sens du champ.

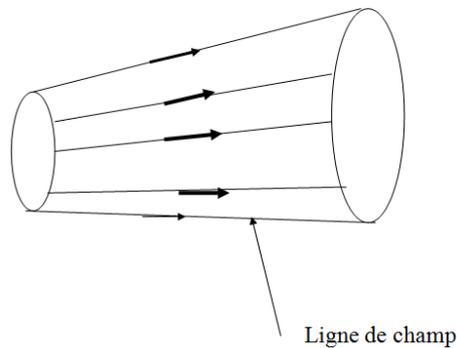


### Exemples de lignes de champ



### 3.2 Tube de champ

C'est l'ensemble des lignes de champ s'appuyant sur un contour fermé



### 4. Propriétés de symétrie du champ électrostatique

L'utilisation des symétries des distributions de charges permet de simplifier le calcul du champ électrostatique. L'utilisation des propriétés de symétrie du champ  $\vec{E}$  permet dans bien des cas de déterminer les composantes du champ. L'exploitation des invariances de la distribution nous renseigne sur les variables dont dépendent les composantes de  $\vec{E}$ .

#### 4.1 Principe de Curie

« Lorsque certaines causes produisent certains effets, les éléments de symétrie des causes doivent se retrouver dans les effets produits ».

Ainsi, si l'on connaît les propriétés de symétrie (ou d'invariances) d'une distribution de charges, ces propriétés de symétries (ou d'invariances) seront applicables au champ électrostatique qui résulte de ces charges.

Les éléments de **symétrie** agissent sur les **directions** des grandeurs vectorielles, tandis que les **invariances** agissent sur les **variables** dont dépendent ces grandeurs.

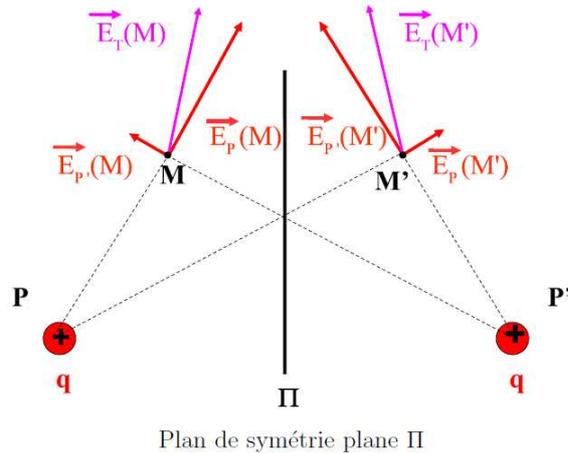
#### 4.2 Plan de symétrie $\pi$ de la distribution de charges

Soit une distribution de charges invariante par symétrie plane S par rapport à un

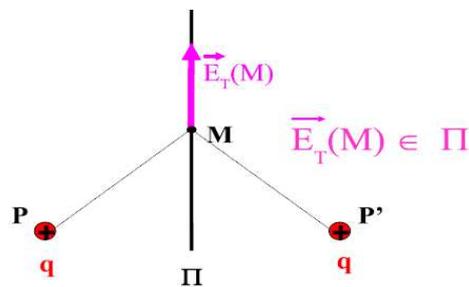
Plan  $\pi$ . Pour illustrer ce cas, prenons deux charges q placées en P et P', où P' est

le symétrique de P par rapport au plan  $\pi$ . Soit M' le symétrique du point M par rapport au plan  $\pi$  ( $M' = S_{/\pi}(M)$ ).

La figure ci-dessous montre que le champ en M' est le symétrique du champ en M :



Le champ  $\vec{E}$  est donc parallèle au plan de symétrie  $\pi$  en tout point M de ce plan.



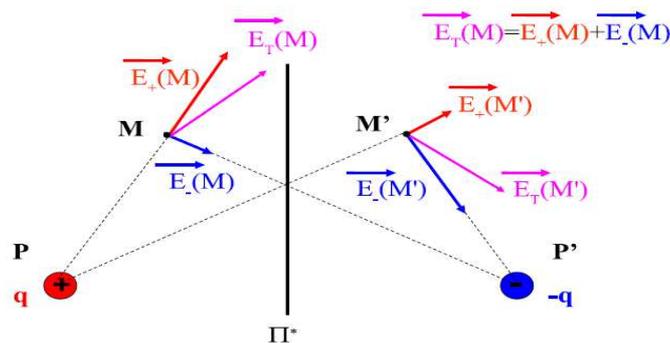
Champ  $\vec{E}$  sur un plan de symétrie  $\Pi$

### 4.3 Plan de symétrie-inversion $\pi^*$ (ou plan d'antisymétrie) de la distribution de charges

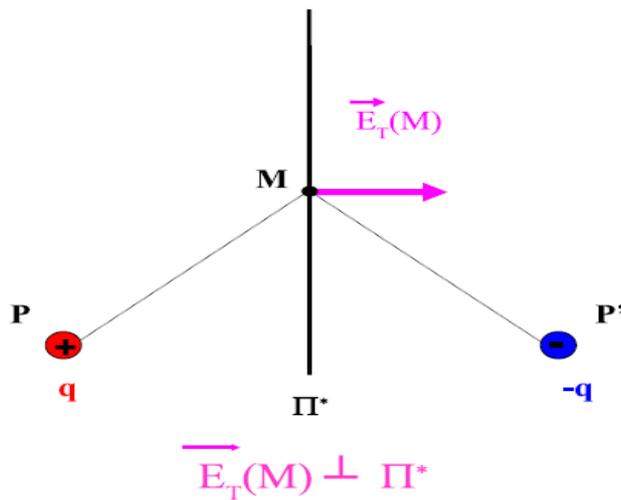
Soit  $\pi^*$  un plan de symétrie inversion de la distribution de charges de la figure ci-dessous. Pour illustrer ce cas, prenons deux charges  $q$  et  $-q$  placées en P et P', où P' est le symétrique de P par rapport au plan  $\pi^*$ . Soit M' le symétrique du point M par rapport au plan  $\pi^*$  ( $M' = S_{/\pi^*} M$ ).

On constate alors que le champ en M' est l'opposé du symétrique du champ en M :

$$\vec{E}(M') = -S_{/\pi^*}(\vec{E}(M))$$



Plan de symétrie-inversion plane  $\Pi^*$



Le champ  $\vec{E}$  est donc perpendiculaire au plan d'antisymétrie  $\Pi^*$  en tout point M de ce plan.

Les plans de symétrie et d'antisymétrie permettent souvent de trouver la direction du champ en un point M.

Pour trouver la direction du champ  $\vec{E}$  en un point M, il suffit de trouver :

\* Soit deux plans de symétrie passant par M. Le champ  $\vec{E}$  appartenant à ces deux plans, il est porté par la droite formée par leur intersection.

\* Soit un plan d'antisymétrie passant par M. La direction du champ  $\vec{E}$  au point M est donnée par la normale au plan d'antisymétrie.

Les plans de symétrie ou d'antisymétrie permettent d'obtenir les composantes du champ  $\vec{E}$ . Les variables dont dépendent ces composantes sont obtenues en étudiant les invariances de la distribution de charges.

#### 4.4 Règles d'invariances et de symétries

1) **Invariance d'une distribution par translation le long d'un axe** : le champ créé ne dépendra pas de la variable associée à cet axe.

2) **Invariance d'une distribution par rotation autour d'un axe** : en coordonnées cylindriques ou sphériques, le champ créé ne dépendra pas de l'angle  $\theta$  ou  $\phi$  servant à mesurer la rotation.

3) **Plan de symétrie** : (S) est un plan de symétrie d'une distribution si, pour tout point P de cette distribution, son symétrique P' appartient à la distribution et porte la même charge que P.

## 6. Théorème de GAUSS

Ce théorème permet de calculer rapidement l'expression du champ électrostatique créé par une source possédant un degré de symétrie élevé.

### 6.1 Notion de surface orientée

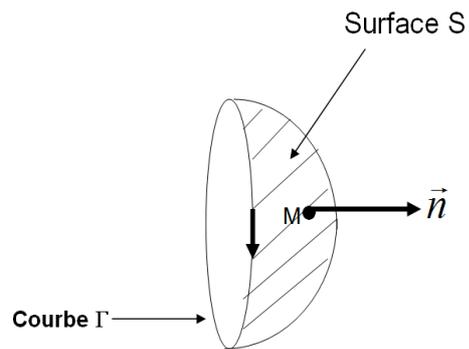
Soit une surface  $S$ .

$\vec{n}$  est perpendiculaire en  $M$  à  $S$ .

Pour orienter la surface  $S$ , on choisit un sens de parcourt du contour fermé  $\Gamma$  et le sens de la normale positive est donné par la règle du tire-bouchon ou la règle de la main droite.

Pour une surface fermée, par convention, on l'oriente

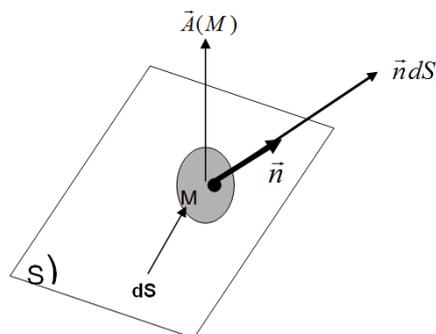
$\vec{S} = S\vec{n} \Rightarrow d\vec{S} = dS\vec{n}$  : élément de surface orientée (on considère que la surface  $S$  est la juxtaposition infini d'éléments de surface  $dS$ ).



### 6.2 Flux d'un vecteur champ à travers une surface fermée

Le flux élémentaire  $d\Phi$  du vecteur  $\vec{A}(M)$  à travers  $d\vec{S}$  est par définition :

$d\Phi = \vec{A}(M) \cdot d\vec{S} \Rightarrow \Phi = \iint_S \vec{A}(M) \cdot d\vec{S}$ .  $\Phi$  est le flux du vecteur  $\vec{A}$  à travers la surface  $S$ .



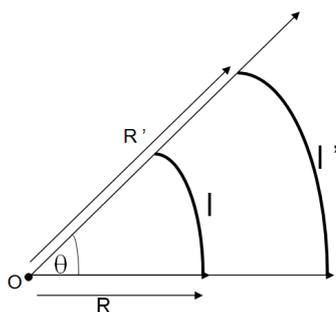
#### ▪ Flux à travers une surface fermée

$$\Phi = \oiint_S \vec{A}(M) \cdot d\vec{S}.$$

$d\vec{S}$  : vecteur élémentaire de surface (infinitésimal), est orienté suivant la normale extérieure à la surface fermée  $S$  au point  $M$ . Pour une surface quelconque, on peut utiliser la règle du « tire-bouchon ». On oriente le contour  $C$  délimitant la surface en choisissant arbitrairement un sens de parcours positif (+). Le vecteur  $d\vec{S}$  est orienté suivant la progression d'un tire-bouchon tournant dans le sens (+).

### 6.3 Notion d'angle solide

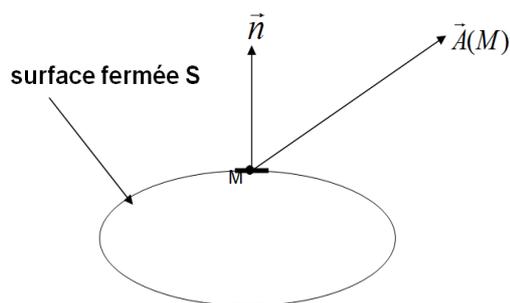
#### 6.3.1 Angle plan



$l$  et  $l'$  sont des longueurs d'arc.

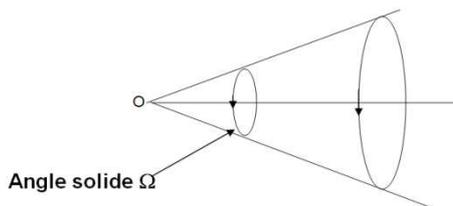
$$\theta = \frac{l}{R} = \frac{l'}{R'} : \text{angle plan.}$$

L'unité d'angle plan est le radian.



#### 6.3.2 Angle solide

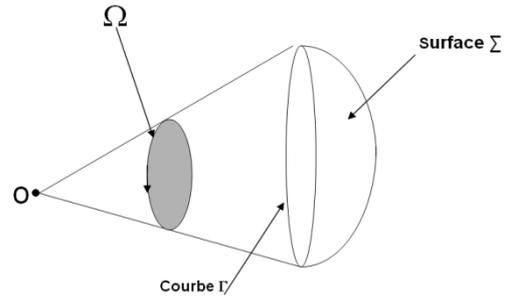
Soit un cône de sommet  $O$  et de demi angle au sommet  $\theta$ , la portion d'espace, délimitée par les génératrices du cône, correspond à un angle "solide"  $\Omega$ .



### 6.3.3 Expression de l'angle solide

On a :  $\Omega = \frac{\Sigma}{R^2}$  .

$\Sigma$  est une portion de sphère de centre O délimitée par l'angle solide  $\Omega$ .

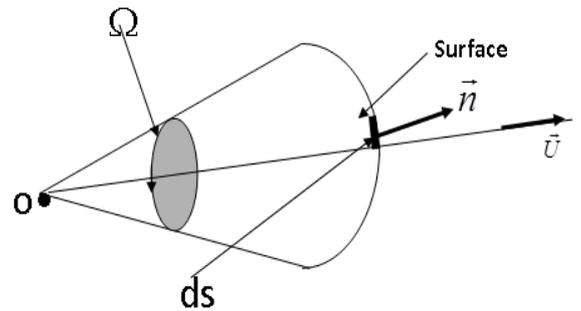


### 6.3.4 Angle solide élémentaire

$dS$  est un élément de surface ; nous définissons l'angle  $\theta = (\vec{n}, \vec{u})$ . Le contour de  $dS$  est vu du point O sous l'angle solide  $d\Omega$  et par définition

$$d\Omega = \frac{d\Sigma}{r^2} = \frac{ds \cos \theta}{r^2} = \frac{\vec{U}}{r^2} \cdot d\vec{S} .$$

$d\Omega$  apparaît comme le flux du vecteur  $\frac{\vec{U}}{r^2}$  à travers l'élément de surface  $dS$ .



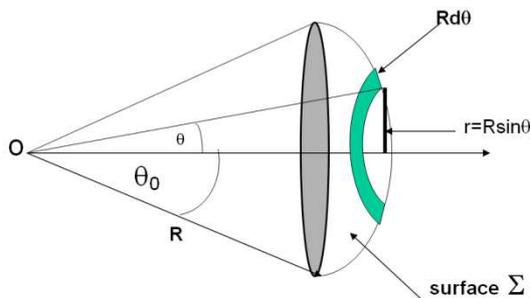
### Angles solides usuels

$\Omega$  est exprimé en **stéradian** (sr)

$\Omega$  dans tout l'espace vaut  $4\pi$  sr ;

**La face d'un cube** est vue sous  $\Omega = \frac{4\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}$  .

### - Cas de la calotte sphérique



$\Rightarrow d\Sigma = 2\pi R \sin \theta \times R d\theta$  : surface de la couronne

$$\Rightarrow d\Sigma = 2\pi R^2 \sin \theta d\theta \Rightarrow \Sigma = 2\pi R^2 \int_0^{\theta_0} \sin \theta d\theta \Rightarrow \Sigma = 2\pi R^2 (1 - \cos \theta_0) \Rightarrow$$

$$\text{Donc } \Omega = \frac{\Sigma}{R^2} = 2\pi(1 - \cos \theta_0).$$

**Remarque :**

$$\text{- Si } \theta_0 \text{ est faible } \Rightarrow \cos \theta_0 \cong 1 - \frac{\theta_0^2}{2} \Rightarrow \Sigma = 2\pi R^2 \frac{\theta_0^2}{2} = \pi R^2 \theta_0^2 \Rightarrow \Omega = \pi \theta_0^2$$

$$\text{- Si } \theta_0 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \Omega = 2\pi \text{ (demi-espace).}$$

$$\text{- Si } \theta_0 = \pi \Rightarrow \Omega = 4\pi.$$

## 6.4 Flux du champ électrostatique - Théorème de GAUSS

### 6.4.1 Flux à travers une surface fermée

#### 6.4.1.1 Charge ponctuelle à l'extérieur de la surface fermée

Le cône de sommet A délimitant un angle solide  $d\Omega$  découpe sur  $\Sigma$  deux surfaces élémentaire  $dS$  et  $dS'$  de normales  $\vec{n}$  et  $\vec{n}'$  orientées vers l'extérieur

$$d\Phi = \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{dS \cos \alpha}{r^2} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} |d\Omega|$$

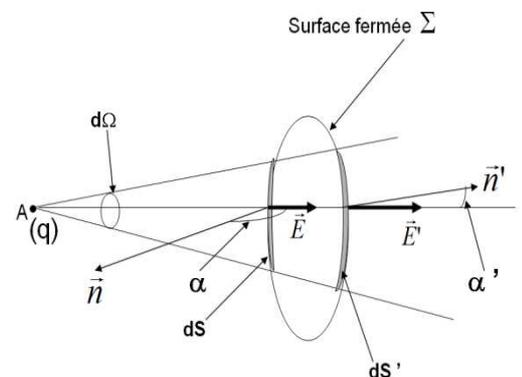
$$\text{En effet, } \cos \alpha < 0 \quad (\alpha > \frac{\pi}{2})$$

$d\Phi'$  qui est le flux de  $\vec{E}'$  à travers  $dS'$  a pour expression :

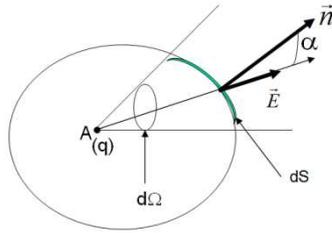
$$d\Phi' = \vec{E}' \cdot \vec{n}' dS' = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{dS' \cos \alpha'}{r'^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} |d\Omega|$$

Nous observons alors que  $d\Phi + d\Phi' = 0$ .

Le flux du champ sortant de la surface fermée ( $\Sigma$ ) est nulle si les charges sont à l'extérieur de cette surface fermée.



### 6.4.1.2 Charge ponctuelle à l'intérieur de la surface fermée



Par définition nous avons :

$$d\Phi = \vec{E} \cdot d\vec{S} = \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{dS \cos \alpha}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega. \text{ Donc } \Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \Omega ;$$

Nous sommes à l'intérieur de la surface fermée donc  $\Omega = 4\pi$  et  $\Phi = \frac{q}{\epsilon_0}$ .

### 6.4.1.3 Enoncé du théorème de GAUSS

Le flux du champ électrostatique sortant d'une surface fermée  $\Sigma$  est égal à la somme de la charge totale à l'intérieur de cette surface fermée divisée par  $\epsilon_0$ .

### 6.4.1.4 Forme locale du théorème de GAUSS

Considérons le cas d'une distribution continue de charges en volume.

$$\text{Nous avons : } \Phi = \iint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_V \rho dv.$$

$$\text{Or } \iint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \text{div} \vec{E} dv \text{ (relation d'Ostrogradsky).}$$

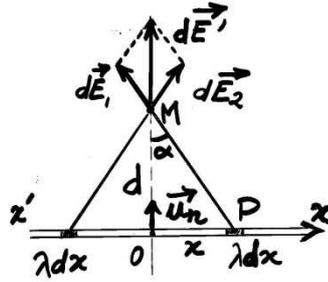
$$\text{Finalement nous avons : } \iiint_V \text{div} \vec{E} dv = \iiint_V \frac{\rho}{\epsilon_0} dv.$$

Soit  $\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$  qui est **la forme locale du théorème de Gauss.**

## 7. Applications

### 7.1. Exercice 1

Champ  $\vec{E}$  créé par un fil rectiligne indéfini de densité uniforme  $\lambda$  ( $\lambda > 0$ ).



### Solution

Par raison de symétrie, le champ demandé est perpendiculaire au fil.

#### 7.1.1 Première méthode: calcul direct

$$dE = dE_1 \cos(\alpha) = k \frac{\lambda dx}{PM^2} \cos(\alpha)$$

$$PM = \frac{d}{\cos(\alpha)}; x = d \tan(\alpha); dx = \frac{d}{\cos^2(\alpha)} d\alpha$$

$$dE = k\lambda \frac{\cos^2(\alpha)}{d^2} \cos(\alpha) \frac{d}{\cos^2(\alpha)} d\alpha = \frac{k\lambda}{d} \cos(\alpha) d\alpha$$

$$E = \frac{k\lambda}{d} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(\alpha) d\alpha$$

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 d} \vec{u}_r \text{ (Radial)}$$

#### 7.1.2 Deuxième méthode :

En considérant comme **surface de Gauss**, le cylindre de rayon  $d$  dont l'axe est le fil chargé, on calcule le flux total de  $\vec{E}$  :

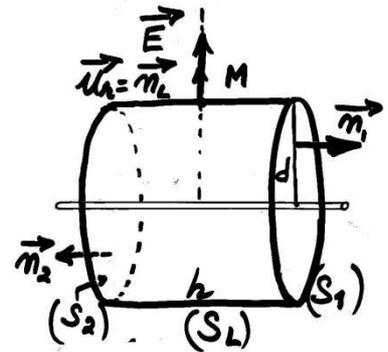
$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_L + \Phi_2, \Phi_1 = \Phi_2 = 0$$

Car  $\vec{E} \perp \vec{n}_1$  et  $\vec{E} \perp \vec{n}_2$

$\Phi_L = \vec{E} \cdot \vec{n}_L S_L$  car  $\vec{E}$  a la même valeur en tout point de  $S_L$  puisque toute rotation autour de l'axe du cylindre ne change pas la distribution.

$$\Phi_L = 2\pi dhE$$

**Théorème de Gauss:**  $2\pi dhE = \frac{\lambda h}{\epsilon_0} \Rightarrow \vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 d} \vec{u}_r \text{ (radial)}$



## 7.2. Exercice 2

Champ  $\vec{E}$  créé par un disque plan uniformément chargé en un point M de son axe.

### Solution

Par raison de symétrie, le champ en M est axial.

$$dE = k \frac{\sigma dS \cos(\alpha)}{PM^2} \text{ avec } \frac{dS \cos(\alpha)}{PM^2} = d\Omega$$

$d\Omega$  Angle solide sous lequel de M, on voit P.

$$dE = k\sigma d\Omega \Rightarrow E = k\sigma\Omega$$

$$\text{Avec } \Omega = 2\pi(1 - \cos(\alpha_0))$$

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (1 - \cos(\alpha_0)) \vec{k}'$$

$$\cos(\alpha_0) = \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}}$$

$$\vec{E} = E(z) \vec{k}'$$

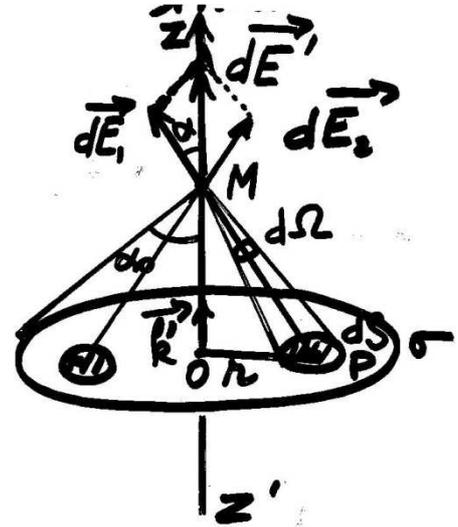
$$\Rightarrow E(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left( 1 - \frac{z}{(R^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}} \right). \text{ Résultat valable pour } z > 0.$$

### Calcul plus précis

$$dE(z) = \frac{k\sigma 2\pi r dr}{(r^2 + z^2)} \cos(\alpha), \quad dS = 2\pi r \times dr : \text{couronne}$$

$$dE(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{z r dr}{(r^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

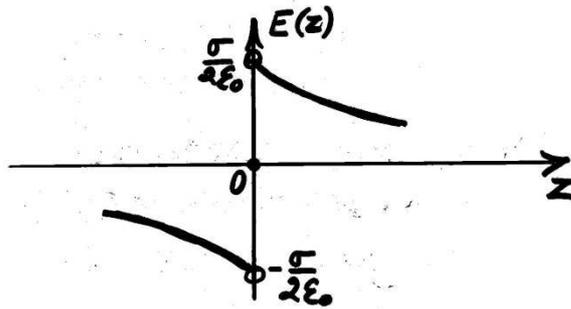
$$E(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \int_0^R \frac{z r dr}{(r^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\sigma z}{2\epsilon_0} \int_0^R d \left( \frac{-1}{(r^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}} \right)$$



$$E(z) = \frac{\sigma z}{2\epsilon_0} \left( \frac{1}{\sqrt{z^2}} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left( \frac{z}{|z|} - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right)$$

$$E(-z) = -E(z)$$

- $z > 0, |z| = z \Rightarrow E(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left( 1 - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right)$
- $z < 0, |z| = -z \Rightarrow E(z) = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left( 1 + \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right)$

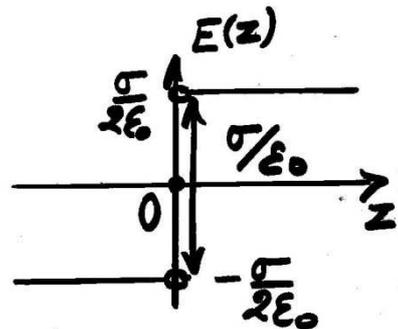


A la traversée du disque:  $\Delta E(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} - \left( -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \right) = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$

La discontinuité à la traversée d'un disque chargé uniformément est  $\frac{\sigma}{\epsilon_0}$

Pour un plan infini,  $R \rightarrow \infty, \Rightarrow E(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{z}{|z|}$

- $z > 0, E(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$
- $z < 0, E(z) = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}$



## CHAPITRE 3 : POTENTIEL ELECTROSTATIQUE

Le champ électrostatique peut être caractérisé simplement à l'aide d'une fonction que nous appellerons potentiel électrostatique. Cette fonction scalaire est souvent plus simple à déterminer que le champ électrostatique.

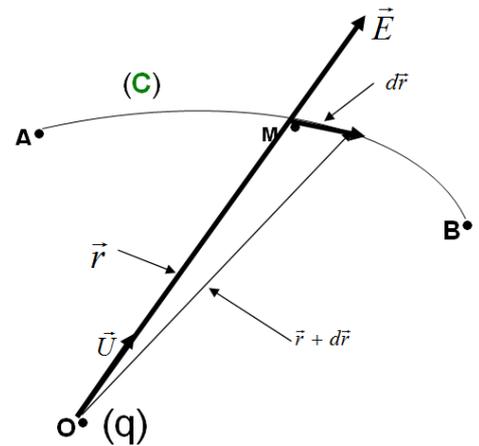
### 1. Circulation du vecteur champ électrique $\vec{E}$

$\vec{E}$  est le champ électrostatique produit par la charge  $q$  positionnée au point O en M.

Plaçons en M une charge unité  $q_0$ . Cette charge est soumise à une force Coulombienne  $\vec{F} = q_0 \vec{E}$ .

Sous l'action de  $\vec{F}$  le point M de charge  $q_0$  se déplace sur la courbe (C). Nous disons que le point M sous l'action de la force  $\vec{F}$  **CIRCULE**.

On appelle élément de circulation l'expression  $dC = \vec{F} \cdot d\vec{r} = \vec{E} \cdot d\vec{r}$ , puisque  $q_0$  est une charge unité.



Nous avons finalement :  $C_{AB} = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r}$  qui est la circulation du vecteur champ électrique  $\vec{E}$  du point A au point B le long de la courbe (C).

### 2. Calcul de $C_{AB}$

$$dC = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{U}}{r^2} \cdot d\vec{r}$$

Nous avons le rayon vecteur  $\vec{r} = r\vec{U} \Rightarrow d\vec{r} = dr\vec{U} + r d\vec{U}$

donc  $\vec{U} \cdot d\vec{r} = dr\vec{U} \cdot \vec{U} + r\vec{U} \cdot d\vec{U}$  ;  $\vec{U} \cdot d\vec{U} = 0$  car  $\vec{U} \cdot \vec{U} = 1$ , donc  $\vec{U} \cdot d\vec{r} = dr \Rightarrow$

$$C_{AB} = \int_A^B \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{dr}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_A^B \frac{dr}{r^2}$$

$$= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{r} \right]_{r_A}^{r_B} \Rightarrow C_{AB} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right] \Rightarrow$$

$$C_{AB} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right] = V_A - V_B ;$$

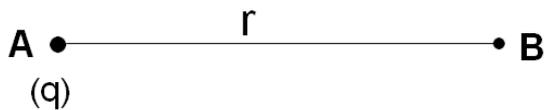
$$\text{avec } V_A = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_A} ; V_B = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_B}$$

La circulation de  $\vec{E}$  ne dépend pas du chemin suivi mais seulement des coordonnées des points de départ (**A**) et d'arrivée (**B**). Cette circulation est mesurée par la variation d'une fonction d'état que nous appelons **potentiel électrostatique**.

**Remarque** : La circulation du champ  $\vec{E}$  créé par une charge est conservative :  $C_A^A = V_A - V_A = 0$  ou  $C_{AB}(\Gamma) = C_{AB}(\Gamma')$  avec  $\Gamma$  et  $\Gamma'$  deux chemins ayant les mêmes extrémités A et B.

### 3. Potentiel électrostatique

#### Définition



$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$  est le potentiel créé par une charge q en A au point B. Ce potentiel V est défini à une

constante près. On écrit donc  $V_B = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} + K$

Mais si l'on suppose qu'à l'infini  $V_B = 0$ , alors  $K = 0$ .

L'unité du potentiel est le **volt**. Le potentiel est un scalaire.

### 4. Relation entre potentiel électrostatique V et champ $\vec{E}$

#### 4.1 Notion de gradient

Soit un champ scalaire  $G(x, y, z)$ . On appelle *gradient* de ce champ scalaire, le champ de vecteurs  $\vec{B}$  tel que :  $\vec{B} = \overrightarrow{grad}G$ .

$\overrightarrow{grad}$  est un opérateur vectoriel de composantes cartésiennes  $\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$ .

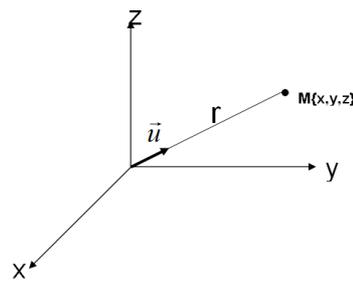
On définit l'opérateur **nabla**  $\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}\right)$ .

On a par la suite :  $\overrightarrow{grad}G = \left(\frac{\partial G}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial G}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial G}{\partial z} \vec{k}\right) = \vec{\nabla}G$ .

## 4.2 Gradient et différentielle

Nous avons :  $dG = \overrightarrow{\text{grad}G} \cdot d\vec{r}$  avec

$$dG = \left( \frac{\partial G}{\partial x} \right)_{y,z} dx + \left( \frac{\partial G}{\partial y} \right)_{x,z} dy + \left( \frac{\partial G}{\partial z} \right)_{x,y} dz.$$



$$\vec{r} = \vec{r}(x, y, z) \Rightarrow$$

**Remarque :**

$$\vec{u} = \frac{\vec{r}}{r} ; \overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\vec{u}}{r^2} = -\frac{\vec{r}}{r^3} \quad (1)$$

## 4.3 Relation entre le potentiel V et le champ $\vec{E}$

$$\vec{E}_M = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{U}}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3}$$



$$(1) \Rightarrow -\overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{\vec{r}}{r^3} \Rightarrow -\overrightarrow{\text{grad}}\left[\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}\right] = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3} \Rightarrow \vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}V}$$

Le champ est dirigé vers les potentiels décroissants.

D'autre part,  $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}V} \Rightarrow \vec{E} \cdot d\vec{r} = -dV = dC$  qui est l'élément de circulation de  $\vec{E}$ .

**Remarque**

Coordonnées	
Cartésiennes	Polaires ou cylindriques
$\vec{E} \begin{cases} E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \\ E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \\ E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} \end{cases}$	$\left. \begin{cases} E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} \\ E_\theta = -\frac{\partial V}{r\partial\theta} \end{cases} \right\} \text{ polaires}$ $E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$

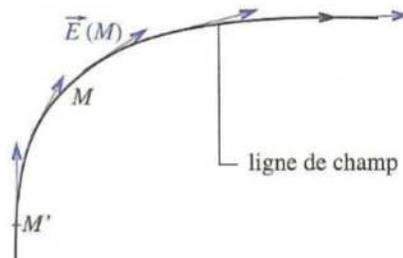
## 5. Surfaces équipotentielle ; lignes de champ

### 5.1 Surface équipotentielle

C'est l'ensemble des points M pour lesquels le potentiel V est constant.

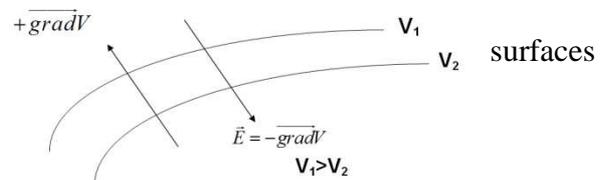
### 5.2 Lignes de champ

On appelle "ligne de champ" une ligne telle qu'en tout point M de la ligne le champ électrique  $\vec{E}(M)$  mesuré au même point lui est parallèle.



### 5.3 Lignes de champ et surface équipotentielle

Les lignes de champ sont perpendiculaires aux équipotentiels et sont orientées vers les potentiels décroissants.



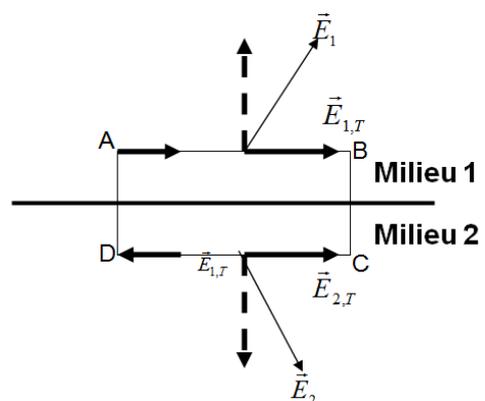
## 6. Relation de passage

La propriété qu'a le champ de dépendre d'une fonction potentielle permet d'établir une relation de passage entre les composantes tangentielles du champ à la traversée d'une surface séparant deux milieux.

On démontre que :

$$E_{1,T} - E_{2,T} = 0 \Rightarrow E_{1,T} = E_{2,T}.$$

Il y a continuité des composantes tangentielles du champ électrique à la traversée de deux milieux différents.



## 7. Équation de POISSON

Nous avons :  $\text{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ ; nous savons que  $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}V}$  et on peut déduire la relation

suivante :  $\text{div}(-\overrightarrow{\text{grad}V}) = \frac{\rho}{\epsilon_0}$  soit  $\Delta V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$ .

En définitive nous avons :  $\Delta V + \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0$  qui est l'équation de POISSON.

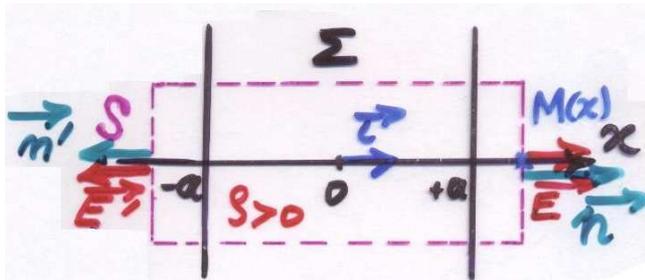
**Remarque :** si  $\rho = 0$  alors  $\Delta V = 0$  qui est l'équation de LAPLACE.

### Exercice : Champ et potentiel créés par un gaz chargé.

La région de l'espace telle que  $|x| \leq a$  porte une densité volumique uniforme  $\rho$  de charge.

Calculer  $\vec{E}$  et  $V$  en tout point de l'espace. On désigne par  $V_0$  le potentiel en O.

**Solution:**



Calcul du champ  $\vec{E}$

➤ Rappel:

Par raison de symétrie, le champ demandé est parallèle à  $\vec{i}$

$$\vec{E} = E(x)\vec{i} \text{ et: } E(-x) = -E(x)$$

▪  $|x| > a$

Théorème de Gauss appliqué à la surface  $\Sigma$

$$2SE(x) = \rho 2aS \times \frac{1}{\epsilon_0} \Rightarrow E(x) = \frac{\rho a}{\epsilon_0} = cte$$

$$x > a, \vec{E} \text{ et } \vec{i} \text{ de même sens: } E(x) = \frac{\rho a}{\epsilon_0}$$

$$x < -a, \vec{E} \text{ et } \vec{i} \text{ de sens opposés: } E(x) = -\frac{\rho a}{\epsilon_0}$$

$$\blacksquare \quad |x| \leq a$$

$$2SE(x) = \frac{\rho 2xS}{\epsilon_0} \Rightarrow E(x) = \frac{\rho x}{\epsilon_0}, (x > 0)$$

$$\left( \operatorname{div} \vec{E}(x) = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \frac{dE(x)}{dx} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \Rightarrow E(x) = \frac{\rho x}{\epsilon_0}; cte = 0, E(0) = 0 \right)$$

$E(x)$  est valable pour  $-a \leq x \leq a$ , pour  $x > 0$  comme pour  $x < 0$ . C'est le signe de  $x$  qui va orienter  $\vec{E}$ :

- Pour  $x > 0$ ,  $\vec{E}$  même sens que  $\vec{i}$  ;
- Pour  $x < 0$ ,  $\vec{E}$  sens contraire à  $\vec{i}$  .

Calcul de V

$$\frac{dV(x)}{dx} = -E(x) \Rightarrow V(x) = -\int E(x) dx$$

$$\blacksquare \quad |x| > a$$

$$(x > a), V(x) = -\frac{\rho ax}{\epsilon_0} + V_1$$

$$(x < -a), V(x) = \frac{\rho ax}{\epsilon_0} + V_1'$$

$$\blacksquare \quad |x| \leq a$$

$$(0 < x \leq a), V(x) = -\frac{\rho x^2}{2\epsilon_0} + V_0$$

$$(-a < x \leq 0), V(x) = -\frac{\rho x^2}{2\epsilon_0} + V_0$$

Continuité !

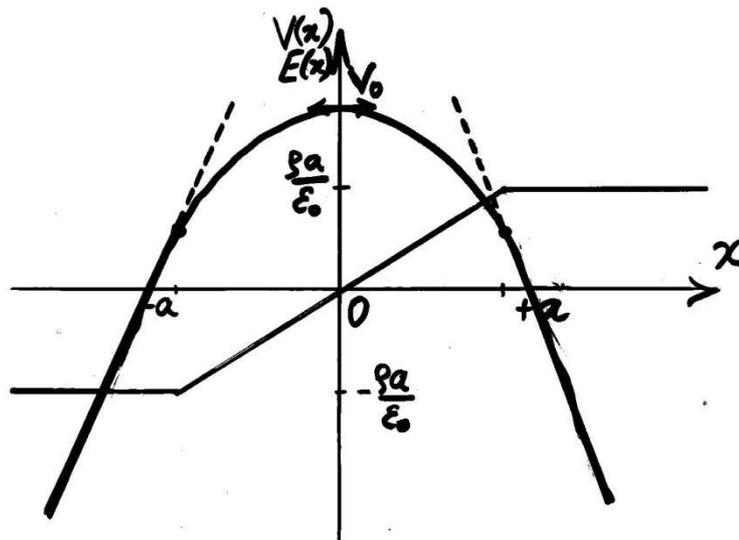
$$\triangleright V(a) = -\frac{\rho a^2}{\epsilon_0} + V_1 \text{ et } V(a) = -\frac{\rho a^2}{2\epsilon_0} + V_0 \Rightarrow V_1 = V_0 + \frac{\rho a^2}{2\epsilon_0}$$

$$\triangleright V(-a) = -\frac{\rho a^2}{\epsilon_0} + V_1' \text{ et } V(-a) = -\frac{\rho a^2}{2\epsilon_0} + V_0 \Rightarrow V_1' = V_0 + \frac{\rho a^2}{2\epsilon_0}$$

Récapitulons:

$$E(-x) = -E(x); V(-x) = V(x)$$

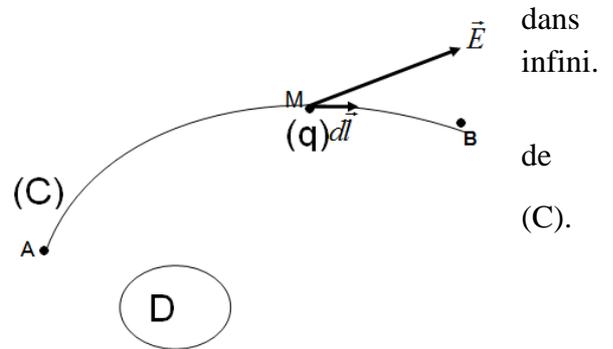
- $|x| \leq a, E(x) = \frac{\rho x}{\epsilon_0}$  et  $V(x) = -\frac{\rho x^2}{2\epsilon_0} + V_0$
- $x > a, E(x) = \frac{\rho a}{\epsilon_0}$  et  $V(x) = \frac{\rho a}{\epsilon_0} \left(-x + \frac{a}{2}\right) + V_0$
- $x < -a, E(x) = -\frac{\rho a}{\epsilon_0}$  et  $V(x) = \frac{\rho a}{\epsilon_0} \left(x + \frac{a}{2}\right) + V_0$



# CHAPITRE 4 : ENERGIE ELECTROSTATIQUE

## 1. Charge ponctuelle dans un champ $\vec{E}$ extérieur

Soit un champ  $\vec{E}$  créé par la distribution de charges le domaine D en M telle que le potentiel soit nul à l'infini. La charge q au point M est soumise à une force  $\vec{F}_{el} = q\vec{E}(M)$ . Soit  $d\vec{l}$  le déplacement de la charge q de masse m sous l'action de  $\vec{F}_{el} = q\vec{E}(M)$  sur la courbe (C). Pour maintenir la charge q au point M, un opérateur extérieur doit exercer une force  $\vec{F}_{op} = -q\vec{E}(M)$ .



$\vec{F}_{op}$  s'opposant à  $\vec{F}_{el}$ .

Le travail nécessaire que doit fournir l'opérateur pour amener lentement q de M à M' très voisin sera :  $dC = \delta W = \vec{F}_{op} \cdot d\vec{l}$

$$\delta W = -q\vec{E}(M) \cdot d\vec{l} = qdV .$$

Le travail nécessaire pour amener q de l'infini ( $V = 0$ ) à M ( $V = V(M)$ ) est  $W_{op} = qV(M)$ .

**Par définition**, l'énergie potentielle électrostatique (ou énergie électrostatique) de la charge q est égale au travail minimum qu'un opérateur extérieur doit fournir pour amener lentement depuis l'infini ( $V=0$ ) cette charge au point M ou elle se trouve.

Elle est notée  $E_p = qV$  : **énergie potentielle électrostatique**.

Elle est exprimée en joule (J) ou en eV ( $1\text{eV}=1.610^{-19}\text{J}$ ). Elle est indépendante du chemin suivi.

La force  $\vec{F}$  dérive de l'énergie potentielle  $E_p$ .

$$\text{En effet : } \vec{F} = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r = -\overrightarrow{\text{grad}} \left( \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0 r} \right) = -\overrightarrow{\text{grad}}(qV) = -\overrightarrow{\text{grad}}E_p \Rightarrow$$

$$W_A^B = -q[V(B) - V(A)] = q(V_A - V_B) = E_p(A) - E_p(B) = \Delta E_p \Big|_A^B$$

## 2. Énergie potentielle d'interaction d'un système de charges

### 2.1 Cas d'un système de deux charges ponctuelles

- Pour constituer une distribution de deux charges  $(q_1, q_2)$  à une distance  $r_{12}$  l'une de l'autre, l'opérateur doit successivement les amener de l'infini ( $V = 0$ ) au point  $M_1$  et au point  $M_2$ .
- Pour amener la charge  $q_1$  de l'infini au point  $M_1$ , il ne fournit aucun effort car initialement l'espace est supposé être vide de charge.
- Une fois  $q_1$  installée, elle crée un potentiel  $V_1(M_2) = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_{12}}$  au point  $M_2$ .
- Pour ce qui concerne la charge  $q_2$ , il doit fournir des efforts, c'est-à-dire un travail  $W = q_2 V_1(M_2)$  au cours du déplacement de  $q_2$  vers le point  $M_2$  pour lutter contre l'action de  $q_2$  par l'intermédiaire de la force de Coulomb.

$$W = q_2 V_1(M_2) = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}} ; \text{ Si on intervertit, on a } W = q_1 V_2(M_1)$$

$V_1(M_2)$  est le potentiel créé en  $M_2$  par  $q_1$  ;

$V_2(M_1)$  est le potentiel créé en  $M_1$  par  $q_2$ .

**Remarque :** S'il fixe d'abord  $q_2$  au point  $M_2$ , l'opérateur fournira un travail  $q_1 V_2(M_1)$ . L'énergie potentielle est alors  $E_P = W = q_2 V_1(M_2) = q_1 V_2(M_1)$

et nous pouvons écrire :  $E_P = \frac{1}{2} [q_1 V_2(M_1) + q_2 V_1(M_2)]$ .

### 2.2 Cas d'un système de trois charges ponctuelles $q_1, q_2, q_3$

**Dans l'ordre**  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$

Travail nul pour  $q_1$  ;

$q_2 V_1(M_2)$  pour amener  $q_2$  ;

$q_3 V_1(M_3) + q_3 V_2(M_3)$  pour amener  $q_3$

$$W = q_2 V_1(M_2) + q_3 V_1(M_3) + q_3 V_2(M_3)$$

**Dans l'ordre  $3 \rightarrow 2 \rightarrow 1$**

Travail nul pour  $q_3$  ;

$q_2 V_3(M_2)$  pour amener  $q_2$  ;

$q_1 V_3(M_1) + q_1 V_2(M_1)$  pour amener  $q_1$

$$W = q_2 V_3(M_2) + q_1 V_3(M_1) + q_1 V_2(M_1)$$

$$\Rightarrow 2W = q_1 [V_3(M_1) + V_2(M_1)] + q_2 [V_1(M_2) + V_3(M_2)] + q_3 [V_1(M_3) + V_2(M_3)]$$

$$\Rightarrow 2W = q_1 V(M_1) + q_2 V(M_2) + q_3 V(M_3)$$

$$2W = \sum_{i=1}^3 q_i V(M_i) = \sum_{i,j(j \neq i)} q_i V_j(M_i)$$

où  $V(M_i)$  désigne le potentiel créé par toutes les autres charges en  $M_i$  (exceptée  $q_i$ ).

$$E_p = W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 q_i V(M_i) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 q_i \left( \sum_{j \neq i} V_j(M_i) \right)$$

### 2.3 Cas d'un système de n charges ponctuelles

Le résultat ci-dessus se généralise à n charges ponctuelles :

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i V(M_i) \text{ ou } W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i \left[ \sum_{j \neq i} V_j(M_i) \right]$$

$$\text{Avec } V(M_i) = \sum_{j(j \neq i)} V_j(M_i)$$

### 3. Energie électrostatique d'une distribution continue de charges

Pour une distribution discrète de charges nous avons :  $E_p = \frac{1}{2} \sum_i q_i V_i$

Et pour une distribution continue nous écrivons:  $E_p = \frac{1}{2} \iiint_{\tau} \rho V d\tau$

$d\tau$  = élément de volume, pour une répartition en volume.

Dans le cas d'une distribution surfacique de charges nous avons :  $E_p = \frac{1}{2} \iint_S \sigma V dS$

$dS$  = élément de surface.

Si la distribution est portée à un potentiel  $V$ , nous avons  $W = \frac{1}{2}VQ$

$$Q = \int_{\tau} \rho d\tau = \int_S \sigma dS$$

#### 4. Expression de l'énergie électrostatique en fonction du champ $\vec{E}$

$$E_p = \frac{1}{2} \iiint_{\tau} \rho V d\tau ; \text{ L'expression locale du théorème de Gauss donne : } \operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\text{Soit } \rho = \epsilon_0 \operatorname{div} \vec{E} \text{ donc } E_p = \frac{\epsilon_0}{2} \iiint_{\tau} V \operatorname{div} \vec{E} d\tau$$

$$\text{avec } V \operatorname{div} \vec{E} = V \left( \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right)$$

$$V \frac{\partial E_x}{\partial x} = \frac{\partial (VE_x)}{\partial x} - E_x \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial (VE_x)}{\partial x} - (E_x)(-E_x) \Rightarrow V \frac{\partial E_x}{\partial x} = \frac{\partial (VE_x)}{\partial x} + E_x^2$$

$$V \left( \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) = \frac{d(E_x V)}{dx} + \frac{d(VE_y)}{dy} + \frac{d(VE_z)}{dz} + E_x^2 + E_y^2 + E_z^2$$

$$\text{Soit } V \operatorname{div} \vec{E} = \operatorname{div}(V\vec{E}) + E^2 \text{ et finalement nous avons : } E_p = \frac{\epsilon_0}{2} \iiint_{\tau} (\operatorname{div}(V\vec{E}) + E^2) d\tau$$

**Remarque :**

$$\iiint_{\tau} \operatorname{div}(V\vec{E}) d\tau = \iint_S V\vec{E} dS \rightarrow 0 \text{ si } r \rightarrow \infty$$

$$\text{en effet } V \approx \frac{1}{r} \text{ et } E \approx \frac{1}{r^2} \text{ donc } EV \approx \frac{1}{r^3} \Rightarrow EV \rightarrow 0 \text{ si } r \rightarrow \infty$$

$$\text{Finalement nous avons : } E_p = \frac{\epsilon_0}{2} \iiint_{\tau} E^2 d\tau$$

et ici le domaine d'intégration est tout l'espace.

Tout se passe comme si l'énergie électrostatique d'une distribution continue de charges était répartie dans l'espace où règne  $\vec{E}$  avec une densité volumique d'énergie :

$$\frac{dE_p}{d\tau} = \frac{\epsilon_0}{2} E^2 .$$

# CHAPITRE 5 : DIPOLE ELECTROSTATIQUE

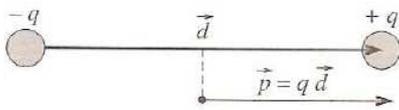
## 1. Définitions

### 1.1 Dipôle électrostatique

C'est un ensemble de deux charges ponctuelles opposées  $+q$  et  $-q$  situées à une distance  $d$  l'une de l'autre.

Cette distance est infiniment petite par rapport à la distance à laquelle on étudie les effets de ce dipôle. Ces effets sont le champ électrostatique  $\vec{E}$  et le potentiel  $V$ .

### 1.2 Moment dipolaire

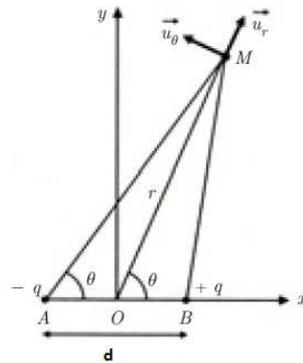


On appelle **moment dipolaire** le vecteur  $\vec{p} = q\vec{d}$ . Ce vecteur est toujours dirigé de la charge négative vers la charge positive.

L'unité est le Debye, notée D. On a :  $1D = \frac{10^{-29}}{3} C.m$  (C.m = coulomb.mètre).

## 2. Potentiel $V(M)$ créé par un dipôle à grande distance ( $d \ll r$ )

Le potentiel et le champ créés par un dipôle peuvent être calculés de manière exacte en tout point M de l'espace. Néanmoins, l'expression exacte du champ  $\vec{E}$  et du potentiel  $V$  est complexe. Afin d'obtenir une expression plus simple, nous sommes amenés à effectuer des approximations.



On considère un dipôle de moment dipolaire  $\vec{p} = q\vec{d} = qd\vec{i}$ . Le potentiel créé par le dipôle en tout point M de l'espace s'écrit :

$$V(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{BM} - \frac{1}{AM} \right].$$

Posons  $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ ,  $\Rightarrow V(M) = kq \left[ \frac{1}{BM} - \frac{1}{AM} \right]$

$r$  très grand entraîne que par rapport à  $AB$ ,  $AM$  et  $BM$  sont presque parallèles.

Hypothèse :  $V(\infty) = 0$

$$\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OB}$$

$$\Rightarrow BM^2 = OM^2 + OB^2 - 2OM \times OB \cos(\theta) \Rightarrow BM^2 = r^2 + \frac{d^2}{4} - dr \cos(\theta) ;$$

$$AM^2 = OM^2 + OA^2 - 2OM \times OA \cos(\pi - \theta) \Rightarrow AM^2 = r^2 + \frac{d^2}{4} + dr \cos(\theta)$$

$$\frac{1}{BM} = \frac{1}{r} \left( 1 + \frac{d^2}{4r^2} - \frac{d \cos(\theta)}{r} \right)^{-\frac{1}{2}} ; \quad \frac{1}{AM} = \frac{1}{r} \left( 1 + \frac{d^2}{4r^2} + \frac{d \cos(\theta)}{r} \right)^{-\frac{1}{2}}$$

Avec  $\frac{d^2}{4r^2} \ll \ll \frac{d \cos(\theta)}{r} \Rightarrow \frac{d^2}{4r^2}$  négligeable devant  $\frac{d \cos(\theta)}{r}$

$$\Rightarrow \frac{1}{BM} = \frac{1}{r} \left( 1 - \frac{d \cos(\theta)}{r} \right)^{-\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad \frac{1}{AM} = \frac{1}{r} \left( 1 + \frac{d \cos(\theta)}{r} \right)^{-\frac{1}{2}}$$

Un développement limité de  $\frac{1}{BM}$  et  $\frac{1}{AM}$  d'ordre 1 au voisinage de 0 donne

$$\frac{1}{BM} = \frac{1}{r} + \frac{d \cos(\theta)}{2r^2} + o\left(\frac{1}{r^2}\right)$$

$$\frac{1}{AM} = \frac{1}{r} - \frac{d \cos(\theta)}{2r^2} + o\left(\frac{1}{r^2}\right)$$

$$\text{D'où } V(M) = \frac{kq}{r} \left[ \left( 1 + \frac{d \cos(\theta)}{2r} + o\left(\frac{1}{r}\right) \right) - \left( 1 - \frac{d \cos(\theta)}{2r} + o\left(\frac{1}{r}\right) \right) \right]$$

$$\Rightarrow V(M) = \frac{kqd}{r^2} \cos(\theta) \text{ or } qd = p \Rightarrow V(M) = \frac{kp \cos(\theta)}{r^2}$$

$$\vec{p} \cdot \vec{r} = pr \cos(\theta) \Rightarrow p \cos(\theta) = \vec{p} \cdot \frac{\vec{r}}{r}, \quad \left( \frac{\vec{r}}{r} = \vec{u}_r \right)$$

$$\Rightarrow V(M) = k \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3} \text{ or } \overrightarrow{\text{grad}} \left( \frac{1}{r} \right) = -\frac{\vec{r}}{r^3}$$

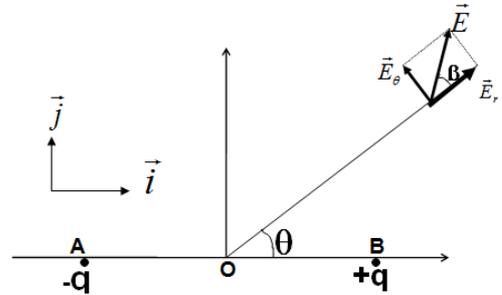
$$V(M) = -k \vec{p} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \left( \frac{1}{r} \right)$$

### 3. Calcul du champ $\vec{E}(M)$ à grande distance

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V = -\vec{\nabla} V(M)$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \left( k \vec{p} \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} \right) = -k \vec{\nabla} \left( (\vec{p} \cdot \vec{r}) \left( \frac{1}{r^3} \right) \right)$$

$$\vec{E} = -k \left[ \frac{1}{r^3} \vec{\nabla} (\vec{p} \cdot \vec{r}) + (\vec{p} \cdot \vec{r}) \vec{\nabla} \left( \frac{1}{r^3} \right) \right]$$



(en coordonnées polaires,  $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \vec{u}_\theta$ )

Nous avons  $\vec{\nabla} (\vec{p} \cdot \vec{r}) = \vec{\nabla} (pr \cos \theta) = \frac{\partial}{\partial r} (pr \cos \theta) \vec{u}_r + \frac{\vec{u}_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (pr \cos \theta)$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} (\vec{p} \cdot \vec{r}) = pr \cos(\theta) \vec{u}_r - p \sin(\theta) \vec{u}_\theta = \vec{p}$$

$$\vec{\nabla} \left( \frac{1}{r^3} \right) = \vec{\nabla} \left( \frac{1}{r^3} \right) = \left( -\frac{3}{r^4} \times \frac{\vec{r}}{r} \right) = -3 \frac{\vec{r}}{r^5}$$

$$\vec{E} = -k \left[ \frac{\vec{p}}{r^3} + (\vec{p} \cdot \vec{r}) \left( -3 \frac{\vec{r}}{r^5} \right) \right] = k \times \frac{3(\vec{p} \cdot \vec{r}) \vec{r} - r^2 \vec{p}}{r^5} \Rightarrow$$

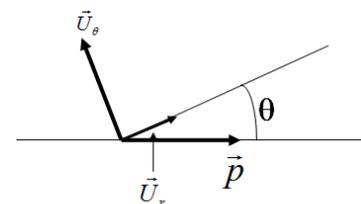
Nous déduisons ainsi l'expression du vecteur champ électrique en fonction du vecteur moment dipolaire.

$$\vec{E} = k \times \frac{3(\vec{p} \cdot \vec{u}_r) \vec{u}_r - \vec{p}}{r^3}$$

En projetant  $\vec{p}$  sur  $\vec{u}_r$  et  $\vec{u}_\theta$ , nous obtenons :

$$\vec{E} = \frac{k}{r^3} (3p \cos \theta \vec{u}_r - p \cos \theta \vec{u}_r + p \sin \theta \vec{u}_\theta)$$

$$\vec{E} = \frac{2kp \cos \theta}{r^3} \vec{u}_r + \frac{kp \sin \theta}{r^3} \vec{u}_\theta$$



Soit

$$\left\{ \begin{array}{l} E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{p \cos \theta}{r^3} ; \\ E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \sin \theta}{r^3} \end{array} \right.$$

**Rappel :** en coordonnées polaires,  $\overrightarrow{\text{grad}V} = \frac{\partial V}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \vec{u}_\theta$

**Remarque :**

- $V(M)$  en  $\frac{1}{r^2}$  car les termes en  $\frac{1}{r}$  s'annulent (+q, -q) :
- $E$  en  $\frac{1}{r^3}$  car les termes en  $\frac{1}{r^2}$  s'annulent.

# CHAPITRE 6 : MAGNETOSTATIQUE

## 1. Vecteur champ magnétique $\vec{B}$

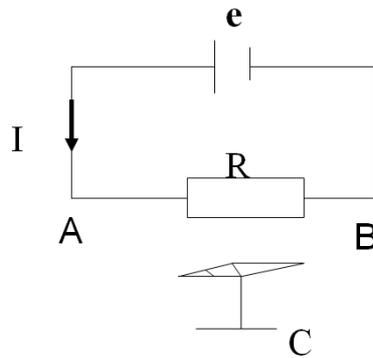
Expérimentalement nous constatons l'existence de forces « magnétiques » au voisinage d'une charge électrique en mouvement.

Pour rendre compte de ce phénomène, nous introduisons, par analogie avec l'électrostatique, un champ de vecteur : le champ magnétique  $\vec{B}$ .

### 1.1 Notion de champ magnétique

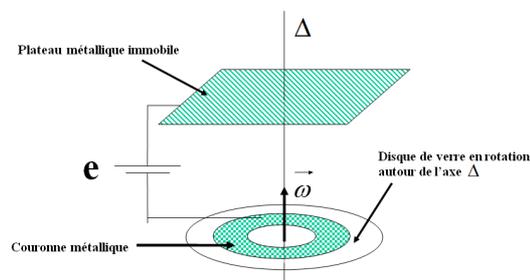
#### ▪ Expérience d'Oersted

Soit le montage suivant, si nous plaçons au voisinage du conducteur AB de résistance R un aimant C, nous remarquons que cet aimant dévie quand le conducteur AB est parcouru par un courant d'intensité I. Si nous inversons le sens du courant, l'aimant dévie en sens inverse.



#### ▪ Expérience de Rowland

On constate expérimentalement qu'une boussole placée au voisinage de la couronne métallique dévie quand la couronne est en rotation autour de l'axe  $\Delta$  ; le sens de déviation change si le sens de rotation de la couronne change.



## 1.2 Interprétation des deux expériences

Dans ces expériences il y a déplacement de charges électriques. Ces déplacements engendrent des effets magnétiques.

Pour des raisons de simplicité on émet l'hypothèse suivante, que d'autres expériences vérifient,  $q$  et  $\vec{V}$  interviennent dans ces "effets magnétiques" par le produit  $q\vec{V}$  ( $q$  est la charge en mouvement à la vitesse  $\vec{V}$ ).

## 1.3 Vecteur champ magnétique $\vec{B}$

Nous postulons qu'au voisinage de toute charge en mouvement, on peut définir un champ de vecteurs : le champ magnétique  $\vec{B}$  dont l'unité de mesure est le Tesla.

Dans le système SI, 1 Tesla =  $\frac{\text{Newton}}{\text{A.m}}$ .

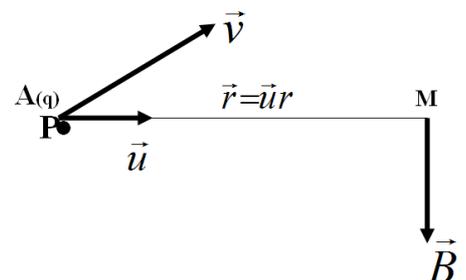
## 1.4 Champ magnétique créé par une charge en mouvement

### Position du problème

Soit une particule A de charge  $q$  au point P à l'instant  $t$ , animée d'une vitesse  $\vec{V}$ . Quelle est la valeur du champ magnétique  $\vec{B}$  que cette charge en mouvement crée au point M ? Expérimentalement on montre que  $\vec{B}$  est correctement défini par la relation suivante :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\vec{V} \wedge \vec{r}}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\vec{V} \wedge \vec{U}}{r^2}$$

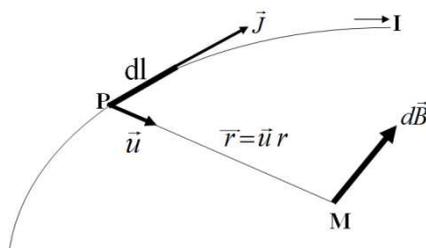
avec  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  qui est la perméabilité du vide.



## 2. Champ magnétique créé par un élément de courant

### Loi de Biot et Savart

Soit un conducteur de section  $S$  parcouru par un courant d'intensité  $I$  et considérons un élément  $dl$  de ce circuit. Quelle est l'expression de l'élément de champ magnétique  $d\vec{B}$  au point M distante de  $r$  de  $dl$  ?



Considérons la densité de courant  $\vec{J} = \frac{\vec{I}}{S}$  colinéaire au fil conducteur.

- soit  $n_V$  le nombre de porteurs de charges libre par unité de volume et  $q$  la valeur de la charge ;
- soit  $\vec{V}$  la vitesse de déplacement des charges ;

nous avons :  $\vec{J} = n_V q \vec{V}$ .

Chacune des particules en mouvement dans  $d\vec{l}$  engendre au point M le même champ magnétique. Le nombre total de porteurs de charge dans le volume  $Sd\vec{l}$  est  $n_V Sd\vec{l}$  et on déduit le champ total engendré au point M :  $d\vec{B} = (n_V Sd\vec{l})\vec{b}$  où  $\vec{b}$  est le champ magnétique produit au point M par une seule charge  $q$  dans le conducteur.

En conséquence  $d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\vec{V} \wedge \vec{r}}{r^3} n_V Sd\vec{l}$  ou encore

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{qn_V \vec{V} \wedge \vec{r}}{r^3} Sd\vec{l} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{J} \wedge \vec{r}}{r^3} Sd\vec{l} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{J} Sd\vec{l} \wedge \vec{r}}{r^3}$$

**Remarque :**  $\vec{J}d\vec{l} = Jd\vec{l}$  car  $\vec{J}$  et  $d\vec{l}$  sont colinéaires.

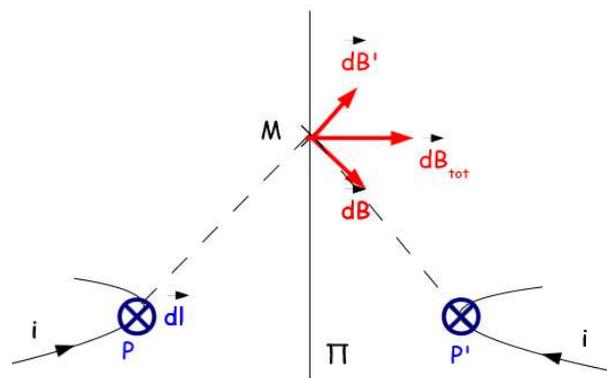
De ce fait  $d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{J Sd\vec{l} \wedge \vec{r}}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id\vec{l} \wedge \vec{r}}{r^3}$ .

La relation  $d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id\vec{l} \wedge \vec{r}}{r^3}$  est connue sous le nom de **relation de Biot et Savart**.

### 3. Symétrie de la distribution de courant

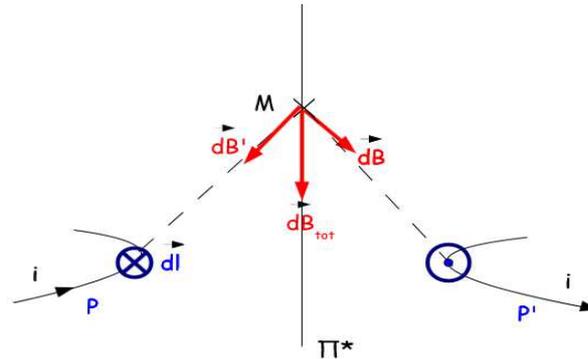
Propriété 1:

Le champ magnétique en un point M du plan de symétrie  $\Pi$  est perpendiculaire au plan de symétrie.



Propriété 2:

Le champ magnétique en un point M du plan d'antisymétrie  $\Pi^*$  appartient au plan d'antisymétrie.



### Invariance par translation et rotation

Si la distribution de courant est invariante par translation et/ou rotation, alors le champ magnétique est lui-même invariant par translation et/ou rotation.

## 4. Champs magnétiques créés par des circuits simples

### 4.1 Circuit rectiligne infiniment long

Nous avons l'élément de champ magnétique

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id\vec{l} \wedge \vec{r}}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id\vec{l} \wedge \vec{U}}{r^2}$$

qui est perpendiculaire au plan  $(Id\vec{l}, \vec{U})$ .

$$\|Id\vec{l} \wedge \vec{U}\| = Idl \sin \beta = Idl \cos \theta \quad \text{d'où} \quad dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl \cos \theta}{r^2}$$

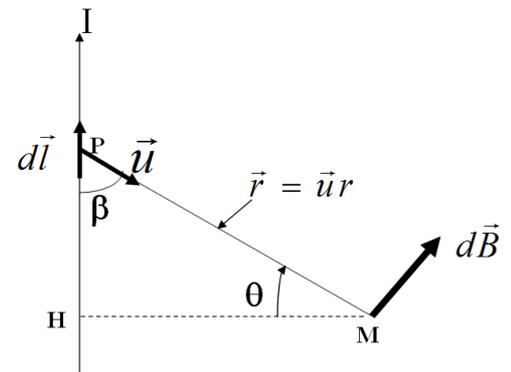
Nous devons ici éliminer r. Posons  $HM = a$  ;

$$\cos \theta = \frac{a}{r} \Rightarrow \frac{1}{r^2} = \frac{\cos^2 \theta}{a^2} \quad \text{donc} \quad dB = \frac{\mu_0}{4\pi} Idl \frac{\cos^3 \theta}{a^2} ;$$

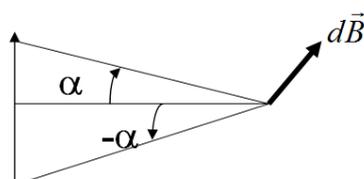
$$\text{exprimons } dl \text{ en fonction de } \theta : \tan \theta = \frac{l}{a} = \frac{HP}{a} \Rightarrow l = a \cdot \tan \theta ; \quad dl = \frac{a d\theta}{\cos^2 \theta}$$

$$\Rightarrow dB = \frac{\mu_0}{4\pi} Ia \frac{\cos^3 \theta}{a^2} \frac{d\theta}{\cos^2 \theta} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \cos \theta}{a} d\theta$$

$$\Rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \theta d\theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d(\sin \theta) = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} [\sin \theta]_{-\pi/2}^{\pi/2} \quad \text{d'où} \quad B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}$$



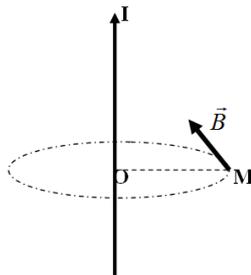
### 4.2 Circuit rectiligne de longueur finie



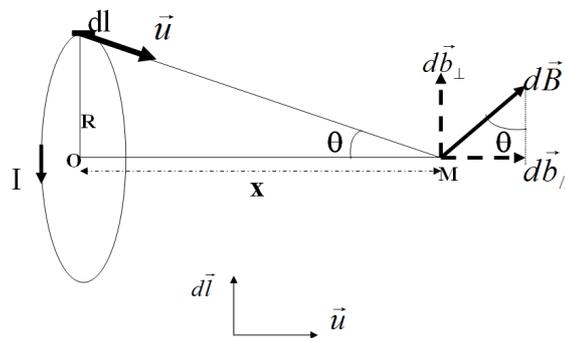
Du cas précédent nous déduisons :  $B = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} [\sin \theta]_{-\alpha}^{\alpha} = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} (\sin \alpha)$

**Remarque : orientation du champ ; règle du tire-bouchon**

Le tire-bouchon dont la pointe progresse dans le sens de l'intensité le long d'un élément de fil a son manche qui tourne dans le sens des lignes de champ qui entourent cet élément.



**4.3 Spire circulaire**



Le vecteur  $d\vec{B}$  est perpendiculaire au plan  $(d\vec{l}, \vec{u})$ . Seule la composante  $db_{||}$  de  $d\vec{B}$  selon le segment OM demeure, les composantes  $db_{\perp}$  s'annulent deux à deux.

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{d\vec{l} \wedge \vec{U}}{r^2} \Rightarrow dB = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{dl}{r^2}, \quad \text{nous déduisons} \quad db_{||} = db = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{\sin \theta dl}{r^2} \text{ avec}$$

$$\sin \theta = \frac{R}{r} = \frac{R}{(R^2 + x^2)^{\frac{1}{2}}} \text{ et } \frac{\sin \theta}{r^2} = \frac{R}{r^3} = \frac{R}{(R^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}};$$

$$\text{finalement } db = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{R}{(R^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} dl \Rightarrow b = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{2\pi R} \frac{R}{(R^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} dl$$

$$b = \frac{\mu_0 IR^2}{2(R^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} \text{ pour une spire.}$$

Pour  $x=0$ ,  $b_0 = \frac{\mu_0 I}{2R}$

- en faisant intervenir l'angle  $\theta$  nous avons :  $b = \frac{\mu_0 I}{2R} \sin^3 \theta = b_0 \sin^3 \theta$

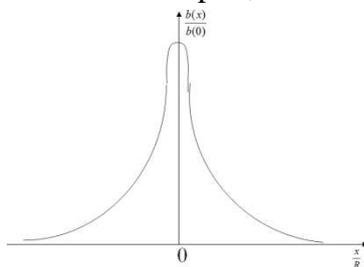
**Remarque :**

- pour une bobine plate de N spires de rayon R nous avons :  $b = \frac{\mu_0 NI}{2R} \sin^3 \theta$

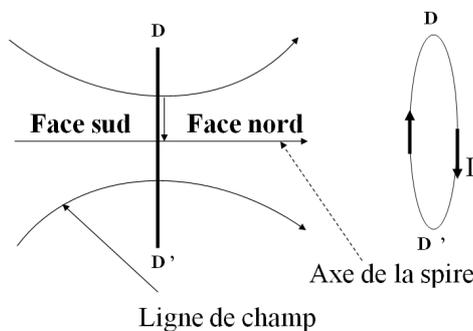
- la loi du tire-bouchon nous donne la direction et le sens du champ  $\vec{b}$  en fonction du sens du courant ;

- Un tire-bouchon dont le manche tourne dans le sens du courant a sa pointe qui progresse dans le sens du champ.

- b en fonction de la distance x au centre de la spire, nous avons ci-dessous l'allure du champ magnétique.



Topographie des lignes de champ d'une spire circulaire



On adopte la convention suivante pour distinguer les faces du circuit circulaire :

- La face nord est celle par laquelle sortent les lignes de champ
- La face sud est celle par laquelle rentrent les lignes de champ

Cette convention est valable pour tous les circuits.

**Remarque :** règle du tire-bouchon

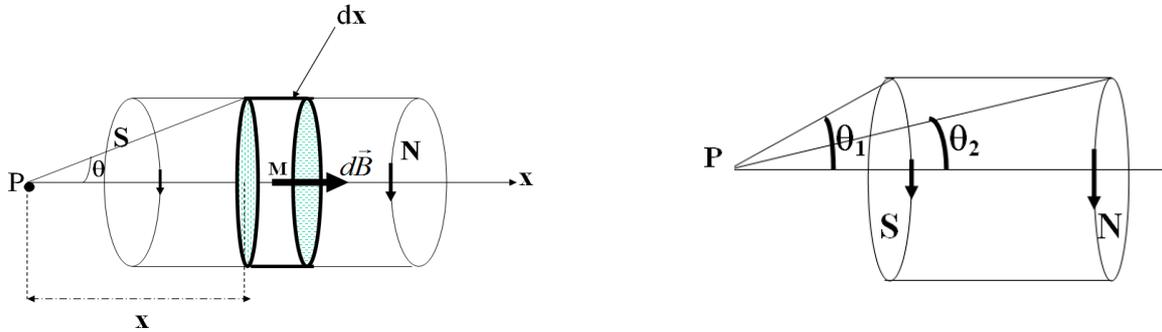
Le tire-bouchon dont le manche tourne dans le sens du courant a sa pointe qui progresse à l'intérieur du circuit de la face Sud vers la face Nord.

#### 4.4 Champ magnétique d'un solénoïde en un point de son axe

Un solénoïde est la superposition d'un ensemble de spires circulaires identiques.

Soit  $n$  le nombre de spires par unité de longueur et  $R$  le rayon des spires.

Considérons la tranche de solénoïde d'abscisse  $x$  et d'épaisseur  $dx$ . Cette tranche est assimilable à une bobine plate de  $ndx$  spires.



Au point P nous avons :  $dB = \frac{\mu_0 n I}{2R} \sin^3 \theta dx$  ; prenons  $\theta$  comme variable d'intégration.

$$\tan \theta = \frac{R}{x} \Rightarrow x = \frac{R}{\tan \theta} \Rightarrow dx = -R \frac{d\theta}{\sin^2 \theta}$$

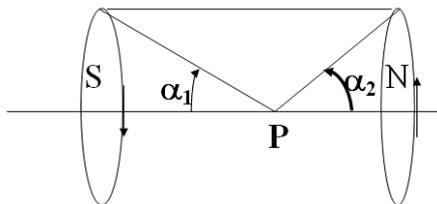
$$\text{ceci entraîne : } dB = -\frac{1}{2} \mu_0 n I \sin \theta d\theta \Rightarrow B = -\frac{1}{2} \mu_0 n I \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin \theta d\theta$$

$$\text{et } B = \frac{\mu_0 n I}{2} (\cos \theta_2 - \cos \theta_1)$$

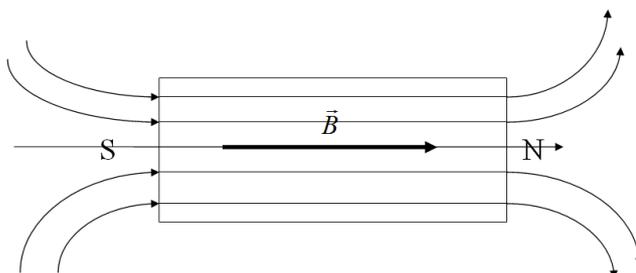
#### Remarques :

- **Le point P à l'intérieur du solénoïde**

Nous avons  $B = \frac{\mu_0 n I}{2} (\cos \alpha_2 + \cos \alpha_1)$  comme expression du module du champ.



- **Topographie du champ d'un solénoïde dans un plan passant par l'axe.**



- **Cas d'un solénoïde infiniment long :**

Ici  $\alpha_1 = \alpha_2 \rightarrow 0$  et  $B = \mu_0 nI$ . Nous déduisons que le champ B est uniforme à l'intérieur d'un solénoïde très long.

**5. Propriétés fondamentales du champ magnétique  $\vec{B}$**

L'essentiel des propriétés du champ électrostatique  $\vec{E}$  découlent de deux lois fondamentales.

- l'une relative à son flux à travers une surface fermée :  $\Phi(\vec{E}) = \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{\sum q_{\text{intérieure}}}{\epsilon_0}$
- l'autre concerne la circulation le long d'une courbe fermée. Cette circulation est nulle le long d'une courbe fermée. On dit alors que  $\vec{E}$  dérive d'un potentiel :  $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}(V)$ .

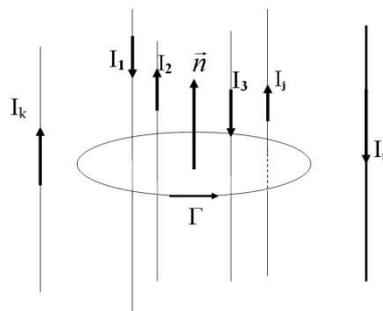
On montre aussi que les propriétés fondamentales du champ magnétique  $\vec{B}$  se réduisent à l'établissement de deux lois du même type que précédemment à savoir :

- le flux de  $\vec{B}$  à travers une surface fermée ;
- la circulation de  $\vec{B}$  le long d'une courbe fermée.

**6. Circulation du vecteur  $\vec{B}$  le long d'une courbe fermée**

**6.1 Théorème d'Ampère**

Considérons un certain nombre de conducteurs parcourus respectivement par des courants d'intensité  $I_1, I_2, I_3, \dots, I_n$  ;



Soit une courbe fermée  $\Gamma$  enlaçant certains de ces conducteurs parcourus par les courants  $I_1, I_2, I_3, \dots, I_n$ . Choisissons un sens de parcours sur  $\Gamma$  comme l'indique la figure et  $\vec{n}$  la normale. Comptons **positivement** les courants de même sens que  $\vec{n}$  et **négativement** ceux de sens contraire. **La forme intégrale du théorème d'Ampère** s'exprime sous la forme :

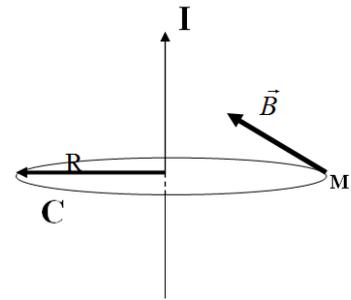
$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_{i=1}^{i=n} I_i$$

qui est la circulation de vecteur  $\vec{B}$  le long de la courbe fermée  $\Gamma$ .

N.B : **On ne considère que les courants qui traversent la courbe  $\Gamma$ .**

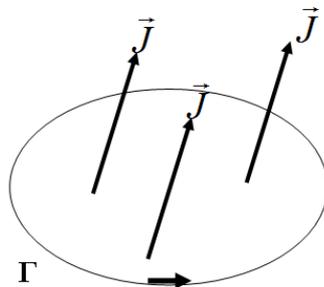
### Illustration du théorème d'Ampère

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I \Rightarrow B \cdot 2\pi R = \mu_0 I \Rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$$



### 6.2 Forme locale du théorème d'Ampère

Soit un conducteur de section  $S$  parcouru par un courant de densité  $\vec{J}$  et soit une courbe fermée  $\Gamma$  entourant ce conducteur, nous avons :



$\int_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \iint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} \Rightarrow \iint_S \overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \mu_0 \iint_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$  soit  $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$  qui est la **forme locale du théorème d'Ampère**.

### 7. Force de LAPLACE

Expérimentalement, on montre qu'une particule de charge  $q$  animée d'une vitesse  $v \ll c$  ( $c =$  vitesse de la lumière) et placée dans un espace où existe un champ magnétique  $\vec{B}$  est soumise à une force d'expression :

$$\vec{F}_L = q\vec{v} \wedge \vec{B} \text{ qui est la force de LAPLACE.}$$

### 8. Force de LORENTZ

Soit un champ électrostatique  $\vec{E}$  créé par toutes les charges immobiles dans l'espace entourant un point M. Plaçons une charge  $q$  en ce point. Cette charge subit l'action de  $\vec{F}_e = q\vec{E}$ . Si toutes les charges sont en mouvement alors la charge au point M subit :

une force électrique analogue à la force électrostatique de la forme :  $\vec{F}_e = q\vec{E}$  où  $\vec{E}$  est indépendant de la charge  $q$ .

Une force magnétique qui résulte du mouvement de la charge  $q$  de forme  $\vec{F}_L = q\vec{v} \wedge \vec{B}$ .

Dans ces conditions la force totale à laquelle est soumise la charge  $q$  en mouvement est la force de LORENTZ

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$$