

Nombres réels, bornes supérieures et inférieures

Exercice 1 :

Si a et b sont des réels positifs ou nuls, montrer que

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} \leq \sqrt{2}\sqrt{a+b}$$

Allez à : [Correction exercice 1](#) :

Exercice 2 :

Déterminer les ensembles suivants, mettre ces ensemble sous la forme d'un intervalle de \mathbb{R} ou une réunion d'intervalles.

$$\begin{aligned} A_1 &= \{x \in \mathbb{R}, x^2 < 1\} \\ A_2 &= \{x \in \mathbb{R}, x^3 \leq 1\} \\ A_3 &= \left\{x \in \mathbb{R}, -1 < \frac{2x}{x^2 + 1} < 1\right\} \\ A_4 &= \left\{x \in \mathbb{R}^*, \frac{1}{|x|} > 1\right\} \end{aligned}$$

Allez à : [Correction exercice 2](#) :

Exercice 3 :

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*, m \in \mathbb{N}^*$

$$0 < \frac{mn}{(m+n)^2} \leq \frac{1}{4}$$

2. En déduire que

$$A = \left\{ \frac{mn}{(m+n)^2}, n \in \mathbb{N}^*, m \in \mathbb{N}^* \right\}$$

Admet une borne inférieure et une borne supérieure que l'on déterminera.

Allez à : [Correction exercice 3](#) :

Exercice 4 :

Pour chacun des exercices suivants, déterminer s'il y a une borne inférieure, une borne supérieure, si oui, les déterminer.

$$\begin{aligned} A &= \left\{ \frac{2^n}{2^n - 1}, n \in \mathbb{N}^* \right\}; & B &= \left\{ \frac{1}{1 - 2^{-n}}, n \in \mathbb{N}^* \right\} \\ C &= \left\{ \frac{x^3}{|x^3 - 1|}, x \in]0,1[\cup]1, +\infty[\right\}; & D &= \left\{ \frac{x^n}{|x^n - 1|}, x \in]0,1[\cup]1, +\infty[, n \in \mathbb{N}^* \right\} \end{aligned}$$

Allez à : [Correction exercice 4](#) :

Exercice 5 :

Soit

$$X = \left\{ \frac{1}{p} + \frac{1}{q}; p, q \in \mathbb{N}^* \right\}$$

1. Montrer que X est majoré et minoré.

2. En déduire que X possède une borne supérieure et une borne inférieure.

Allez à : [Correction exercice 5](#) :

Exercice 6 :

Soit

$$X = \left\{ \frac{(-1)^n}{n} + \frac{2}{n}; n \in \mathbb{N}^* \right\}$$

1. Montrer que X est minoré et majoré.
2. Montrer que X admet un plus grand élément et le déterminer.
3. Montrer que X admet une borne supérieure et une borne inférieure et les déterminer.

Allez à : [Correction exercice 6](#) :

Exercice 7 :

Soit

$$X = \left\{ \frac{x+1}{x+2}; x \in \mathbb{R}, x \leq -3 \right\}$$

Montrer que X admet une borne inférieure et une borne supérieure et les déterminer.

Allez à : [Correction exercice 7](#) :

Exercice 8 :

Soit

$$X = \left\{ \frac{2xy}{x^2 + y^2}, x \in \mathbb{R}^*, y \in \mathbb{R}^* \right\}$$

1. Montrer que X admet une borne inférieure et la déterminer, est-ce un minimum ?
2. Montrer que X admet une borne supérieure et la déterminer, est-ce un maximum ?

Allez à : [Correction exercice 8](#) :

Exercice 9 :

Trouver tous les réels x tels que $|x - 1| + |x - 2| = 2$

Allez à : [Correction exercice 9](#) :

Exercice 10 :

Résoudre l'équation

$$\sqrt{41-x} + \sqrt{41+x} = 10$$

Indication :

Malgré les apparences il n'est pas nécessaire de connaître la valeur de 41^2

Allez à : [Correction exercice 10](#) :

Exercice 11 :

1. Résoudre

$$|u - 1| + |u + 1| = 4$$

2. En déduire les solutions de

$$|\sqrt{x+1} - 1| + |\sqrt{x+1} + 1| = 4$$

3. Puis les solutions de

$$\sqrt{x+2 - 2\sqrt{x+1}} + \sqrt{x+2 + 2\sqrt{x+1}} = 4$$

Allez à : [Correction exercice 11](#) :

Exercice 12 :

Soit

$$X = \left\{ \frac{2p}{2pq + 3}; p, q \in \mathbb{N}^* \right\}$$

1. Montrer que X est minoré et majoré.
2. En déduire que X admet une borne supérieure et une borne inférieure et les déterminer.

Allez à : [Correction exercice 12](#) :

Exercice 13 :

Démontrer que $\sqrt[3]{3 + 2\sqrt{6}}$ est un nombre irrationnel.

Allez à : [Correction exercice 13](#) :

Exercice 14 :

On considère la partie $X = \left\{(-1)^n + \frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}^*\right\}$

Démontrer que X possède une borne inférieure et une borne supérieure, déterminer chacune d'entre elle.

Allez à : [Correction exercice 14](#) :

Exercice 15 :

Montrer que $a = \sqrt{7 + 4\sqrt{3}} + \sqrt{7 - 4\sqrt{3}}$ est un nombre entier.

Allez à : [Correction exercice 15](#) :

Exercice 16 :

Soit

$$\alpha = \sqrt{4 - 2\sqrt{3}} + \sqrt{4 + 2\sqrt{3}}$$

Montrer que $\alpha \in \sqrt{3}\mathbb{N}$ (C'est-à-dire de la forme $\sqrt{3}$ multiplié par un entier naturel).

Allez à : [Correction exercice 16](#) :

Exercice 17 :

Soient

$$X = \left\{\frac{(-1)^p}{p} + \frac{2}{p}; p \in \mathbb{N}^*\right\} \quad \text{et} \quad Y = \left\{\frac{(-1)^p}{p} + \frac{2}{q}; p \in \mathbb{N}^*; q \in \mathbb{N}^*\right\}$$

1. Montrer que X possède dans \mathbb{R} une borne supérieure, une borne inférieure et les déterminer.
2. Montrer que Y possède dans \mathbb{R} une borne supérieure, une borne inférieure et les déterminer.

Allez à : [Correction exercice 17](#) :

Exercice 18 :

On rappelle que $\sqrt{2}$ est irrationnel (c'est-à-dire que $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$).

1. Montrer que $\alpha = 6 + 4\sqrt{2}$ et $\beta = 6 - 4\sqrt{2}$ sont irrationnels.
2. Calculer $\sqrt{\alpha\beta}$.
3. Montrer que $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$ est rationnel.

Allez à : [Correction exercice 18](#) :

Exercice 19 :

On suppose que $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ et $\sqrt{6}$ sont irrationnels. Montrer que

1. $\sqrt{2} + \sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$
2. $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 \notin \mathbb{Q}$
3. $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6} \notin \mathbb{Q}$
4. $(3\sqrt{2} + 2\sqrt{3} + \sqrt{6})^2 \notin \mathbb{Q}$. On rappelle que $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$

Allez à : [Correction exercice 19](#) :

Exercice 20 :

1. Montrer que pour tout réels x et y on a :

$$E(x) + E(y) \leq E(x + y) \leq E(x) + E(y) + 1$$

2. Montrer que pour tout entier relatif on a :

$$E\left(\frac{m+n}{2}\right) + E\left(\frac{n-m+1}{2}\right) = n$$

On pourra distinguer les cas $m+n$ pair et $m+n$ impairs.

3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$E\left((\sqrt{n} + \sqrt{n+1})^2\right) = 4n + 1$$

On pourra montrer que $E\left(2\sqrt{n(n+1)}\right) = 2n$

Allez à : [Correction exercice 20](#) :

Exercice 21 :

Montrer que pour tout x et y réels on a :

$$E(x) + E(y) + E(x+y) \leq E(2x) + E(2y)$$

On pourra distinguer les cas

$(E(x) \leq x < E(x) + \frac{1}{2}$ ou $E(x) + \frac{1}{2} \leq x < E(x) + 1)$ et $(E(y) \leq y < E(y) + \frac{1}{2}$ ou $E(y) + \frac{1}{2} \leq y < E(y) + 1)$.

Ce qui fait 4 cas (n'est-ce pas ?).

Allez à : [Correction exercice 21](#) :

Exercice 22 :

Soient $A \subset \mathbb{R}$ et $B = \{y = -x; x \in A\}$

1. Montrer que B est minoré si et seulement si A est majoré.

2. En supposant que A est majoré, démontrer que B admet une borne inférieure et que

$$\inf(B) = -\sup(A)$$

Allez à : [Correction exercice 22](#) :

Exercice 23 :

Soient p et q deux nombres réels non nuls et n un entier strictement positif.

Montrer que le polynôme $P(x) = x^n + px + q$ ne peut avoir plus que deux racines réelles si n est pair et plus que trois racines si n est impairs.

Allez à : [Correction exercice 23](#) :

Exercice 24 :

On rappelle que si I est un intervalle ouvert, quel que soit $x \in I$, il existe $\epsilon > 0$ tel que :

$$]x - \epsilon, x + \epsilon[\subset I$$

Plus généralement, un sous-ensemble A de \mathbb{R} vérifiant la propriété :

$$\forall x \in A, \exists \epsilon > 0,]x - \epsilon, x + \epsilon[\subset A$$

est dit « ouvert ».

Soit I un intervalle ouvert. On veut démontrer qu'il n'existe pas de sous-ensemble ouverts non vides A et B de \mathbb{R} tels que $I = A \cup B$ et $A \cap B = \emptyset$ (autrement dit tels que $\{A, B\}$ soit une partition de I). Pour cela on va supposer que de tels ensemble A et B existent pour aboutir à une contradiction. On considère pour cela $a \in A$ et $b \in B$ et l'ensemble

$$E = \{t \in [0,1]; a + t(b-a) \in A\}$$

1. Montrer que E admet une borne supérieure, que l'on appellera T . (On ne demande pas de trouver T).

2. Montrer (en utilisant le fait que A est ouvert) que $a + T(b-a) \notin A$.

3. En déduire (en utilisant le fait que I est un intervalle) que $a + T(b-a) \in B$.

4. Montrer (en utilisant le fait que B est ouvert) que ceci contredit le fait que T soit la borne supérieure de E .

Allez à : [Correction exercice 24](#) :

CORRECTIONS

Correction exercice 1 :

$$(\sqrt{2}\sqrt{a+b})^2 - (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 = 2(a+b) - (a + 2\sqrt{a}\sqrt{b} + b) = a - 2\sqrt{a}\sqrt{b} + b = (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$$

Ces deux expressions ($\sqrt{a} + \sqrt{b}$ et $\sqrt{2}\sqrt{a+b}$) sont positives donc

$$(\sqrt{2}\sqrt{a+b})^2 \geq (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 \Leftrightarrow \sqrt{2}\sqrt{a+b} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

Allez à : **Exercice 1** :

Correction exercice 2 :

$$A_1 =]-1,1[$$

$$A_2 =]-\infty, 1]$$

$$1 - \left(\frac{2x}{x^2+1}\right)^2 = \frac{(x^2+1)^2 - 4x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{x^4 + 2x^2 + 1 - 4x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{x^4 - 2x^2 + 1}{(x^2+1)^2} = \frac{(x^2-1)^2}{(x^2+1)^2}$$

Donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, 1 - \left(\frac{2x}{x^2+1}\right)^2 > 1 \Leftrightarrow \frac{(x^2-1)^2}{(x^2+1)^2} > 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$$

On pouvait aussi étudier la fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$$

On en déduit que :

$$A_3 =]-\infty, -1[\cup]-1,1[\cup]1, +\infty[$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \frac{1}{|x|} > 1 \Leftrightarrow |x| < 1$$

$$A_4 =]-1,0[\cup]0,1[$$

Allez à : **Exercice 2** :

Correction exercice 3 :

1. m et n étant strictement positifs on a $0 < \frac{mn}{(m+n)^2}$

$$\frac{1}{4} - \frac{mn}{(m+n)^2} = \frac{(m+n)^2 - 4mn}{(m+n)^2} = \frac{m^2 + 2mn + n^2 - 4mn}{(m+n)^2} = \frac{m^2 - 2mn + n^2}{(m+n)^2} = \frac{(m-n)^2}{(m+n)^2} \geq 0$$

Donc

$$\frac{mn}{(m+n)^2} \leq \frac{1}{4}$$

2. $\frac{mn}{(m+n)^2}$ est borné donc A admet une borne inférieure a telle que $0 \leq a$ (car a est le plus grand des minorants) et une borne supérieure b telle que $b \leq \frac{1}{4}$ (car b le le plus petit des majorants).

Comme pour tout $m > 0$ et $n > 0$, $a \leq \frac{mn}{(m+n)^2}$, en prenant $m = 1$ on a :

$$a \leq \frac{n}{(1+n)^2} \rightarrow 0$$

Ce qui implique que $a \leq 0$, on a donc $a = 0$.

Comme pour tout $m > 0$ et $n > 0$, $\frac{mn}{(m+n)^2} \leq b$, en prenant $m = n$ on a :

$$\frac{n^2}{(n+n)^2} \leq b$$

Puis

$$\frac{n^2}{(n+n)^2} = \frac{n^2}{4n^2} = \frac{1}{4}$$

Montre que $\frac{1}{4} \leq b$ et finalement $b = \frac{1}{4}$.

Allez à : **Exercice 3** :

Correction exercice 4 :

On pose $u_n = \frac{2^n}{2^n - 1}$, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est à valeur strictement positive

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{2^{n+1}}{2^{n+1} - 1}}{\frac{2^n}{2^n - 1}} = 2 \times \frac{2^n - 1}{2^{n+1} - 1} = \frac{2^{n+1} - 2}{2^{n+1} - 1} < 1$$

Donc cette suite est strictement décroissante, on en déduit que

$$\sup(A) = u_1 = \frac{2}{2-1} = 2 \quad \text{et} \quad \inf(A) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^n}{2^n - 1} = 1$$

Remarque : A admet un maximum 2 mais pas de minimum.

$\frac{1}{1-2^{-n}} = \frac{2^n}{2^n-1}$, par conséquent $A = B$ ces deux ensembles ont les mêmes bornes supérieures et inférieures.

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x \neq 1}} \frac{x^3}{|x^3 - 1|} = +\infty$$

Donc C n'admet pas de borne supérieure.

Il est évident que pour tout $x \in]0,1[\cup]1, +\infty[$, $\frac{x^3}{|x^3-1|} \geq 0$ donc 0 est un minorant de C par conséquent

$$0 \leq \inf(C)$$

Puis remarquons que

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} \frac{x^3}{|x^3 - 1|} = 0$$

Donc

$$\inf(C) \leq 0$$

En conclusion

$$\inf(C) = 0$$

Remarque : 0 n'est pas un minimum.

Remarque : on aurait pu étudier la fonction

$$\begin{aligned} &]0,1[\cup]1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \\ &x \mapsto \frac{x^3}{|x^3 - 1|} \end{aligned}$$

En faisant attention à distinguer les cas $x \in]0,1[$ (où $x^3 - 1 < 0$) et $x \in]1, +\infty[$ (où $x^3 - 1 > 0$).

Pour l'ensemble D on fait strictement le même raisonnement que pour l'ensemble C . D n'a pas de borne supérieure et sa borne inférieure est 0.

Allez à : **Exercice 4** :

Correction exercice 5 :

1. Comme $p \geq 1$ et $q \geq 1$, $0 < \frac{1}{p} \leq 1$ et $0 < \frac{1}{q} \leq 1$, on a donc

$$0 < \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \leq 1 + 1 = 2$$

Ce qui montre bien que X est majoré et minoré.

2. Pour $p = q = 1$, on a

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 2$$

Donc 2 est le maximum, par conséquent sa borne supérieure.

0 est un minorant de X donc $0 \leq \inf(X)$

Et

$$\lim_{\substack{p \rightarrow +\infty \\ q \rightarrow +\infty}} \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \right) = 0$$

Donc $\inf(X) \leq 0$ et finalement $\inf(X) = 0$

Allez à : **Exercice 5** :

Correction exercice 6 :

1. La première idée serait de montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de terme général $u_n = \frac{(-1)^n + 2}{n}$ est croissante ou décroissante mais cela ne marche pas, vérifions le tout de même

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{(-1)^{n+1} + 2}{n+1} - \frac{(-1)^n + 2}{n} = \frac{((-1)^{n+1} + 2)n - ((-1)^n + 2)(n+1)}{n(n+1)} \\ &= \frac{n((-1)^{n+1} + 2) - ((-1)^n + 2)(n+1)}{n(n+1)} = \frac{2(-1)^{n+1}n - (-1)^n - 2}{n(n+1)} \\ &= \frac{(-1)^{n+1}(2n+1) - 2}{n(n+1)} \end{aligned}$$

Selon la parité de n cette expression est positive ou négative, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ n'est pas monotone, il faut faire autrement.

Pour voir ce qu'il se passe on va calculer les premiers termes de cette suite

$$u_1 = 1; u_2 = \frac{3}{2}; u_3 = \frac{1}{3}; u_4 = \frac{3}{4}; u_5 = \frac{1}{5}; u_6 = \frac{1}{2}$$

Cela donne l'idée d'étudier les deux sous-suites $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de terme général :

$$v_n = u_{2n} = \frac{3}{2n} \quad \text{et} \quad w_n = u_{2n+1} = \frac{1}{2n+1}$$

Ces deux suites sont manifestement positive, décroissante et tendent vers 0, on en conclut que

$$0 < u_n < \max(v_1, w_0) = \frac{3}{2}$$

2. D'après l'étude précédente $\frac{3}{2} = u_2$ est le plus grand élément (le maximum)
3. $\frac{3}{2}$ est un maximum et donc la borne supérieure.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$$

Donc $\inf(X) \leq 0$,

Et comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$, 0 est un minorant donc on a $\inf(X) \geq 0$ et finalement

$$\inf(X) = 0$$

Allez à : **Exercice 6** :

Correction exercice 7 :

Nous allons étudier la fonction

$$\begin{aligned} f:]-\infty, -3] &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{x+1}{x+2} \end{aligned}$$

f est définie, continue et dérivable sur $]-\infty, -3]$ (le seul problème de f est $x = -2$ qui est en dehors de l'intervalle d'étude)

$$f'(x) = \frac{1 \times (x+2) - (x+1) \times 1}{(x+2)^2} = \frac{1}{(x+2)^2} > 0$$

f est strictement croissante sur $]-\infty, -3]$, sa borne inférieure est

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+1}{x+2} = 1$$

Et sa borne supérieure (qui est aussi un maximum) est

$$m = f(-3) = 2$$

Allez à : **Exercice 7** :

Correction exercice 8 :

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ et pour tout $y \in \mathbb{R}^*$,

$$(x + y)^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2xy \geq 0 \Leftrightarrow -(x^2 + y^2) \leq 2xy \Leftrightarrow -1 \leq \frac{2xy}{x^2 + y^2} \quad (1)$$

On peut diviser car x (et y est non nul).

Ce qui signifie que X est une partie de \mathbb{R} minorée et évidemment non vide, donc X admet une borne inférieure.

(1) montre que -1 est un minorant de X , la borne inférieure étant le plus petit des majorants donc

$$\inf(X) \geq -1$$

Si on pose $y = -x$

$$\frac{2xy}{x^2 + y^2} = \frac{-2x^2}{2x^2} = -1$$

Cela montre que

$$\inf(X) \leq -1$$

Par conséquent

$$\inf(X) = -1$$

Il s'agit d'un minimum car cette borne inférieure est dans X .

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ et pour tout $y \in \mathbb{R}^*$

$$(x - y)^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2xy \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \geq 2xy \Leftrightarrow 1 \geq \frac{2xy}{x^2 + y^2} \quad (2)$$

Ce qui signifie que X est une partie de \mathbb{R} majorée et évidemment non vide, donc X admet une borne supérieure.

(2) montre que 1 est un majorant de X , la borne supérieure étant le plus petit des majorants donc

$$\sup(X) \leq 1$$

Si on pose $y = x$

$$\frac{2xy}{x^2 + y^2} = \frac{2x^2}{2x^2} = 1$$

Cela montre que

$$\sup(X) \geq 1$$

Par conséquent

$$\sup(X) = 1$$

Il s'agit d'un maximum car cette borne supérieure est dans X .

Allez à : **Exercice 8** :

Correction exercice 9 :

On pose $f(x) = |x - 1| + |x - 2|$

Pour $x \leq 1$, $x - 1 \leq 0$ et $x - 2 \leq -1 < 0$ donc

$$f(x) = -(x - 1) - (x - 2) = -2x + 3$$

Pour $1 \leq x \leq 2$, $x - 1 \geq 0$ et $x - 2 \leq 0$ donc

$$f(x) = |x - 1| + |x - 2| = x - 1 - (x - 2) = 1$$

Pour $x \geq 2$, $x - 1 \geq 1 > 0$ et $x - 2 \geq 0$ donc

$$f(x) = |x - 1| + |x - 2| = x - 1 + x - 2 = 2x - 3$$

Puis on va résoudre $f(x) = 2$ sur chacun des trois intervalles.

$$\begin{cases} f(x) = 2 \\ x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 3 = 2 \\ x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x \leq 1 \end{cases}$$

$\frac{1}{2} \leq 1$ donc $\frac{1}{2}$ est solution.

$$\begin{cases} f(x) = 2 \\ 1 \leq x \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = 2 \\ 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

Il n'y a pas de solution dans cet intervalle.

$$\begin{cases} f(x) = 2 \\ 2 \leq x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3 = 2 \\ 2 \leq x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{2} \\ 2 \leq x \end{cases}$$

$2 \leq \frac{5}{2}$ donc $\frac{5}{2}$ est solution.

Les réels qui vérifient $|x - 1| + |x - 2| = 2$ sont $\left\{\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right\}$

Allez à : **Exercice 9 :**

Correction exercice 10 :

Comme ces deux expressions sont positives on a

$$\begin{aligned} \sqrt{41-x} + \sqrt{41+x} = 10 &\Leftrightarrow (\sqrt{41-x} + \sqrt{41+x})^2 = 100 \Leftrightarrow 41-x + 2\sqrt{41-x}\sqrt{41+x} + 41+x = 100 \\ &\Leftrightarrow 82 + 2\sqrt{41^2-x^2} = 100 \Leftrightarrow 2\sqrt{41^2-x^2} = 18 \Leftrightarrow \sqrt{41^2-x^2} = 9 \Leftrightarrow 41^2-x^2 = 9^2 \\ &\Leftrightarrow 41^2-9^2 = x^2 \Leftrightarrow x^2 = (41-9)(41+9) \Leftrightarrow x^2 = 32 \times 50 = 16 \times 100 = (4 \times 10)^2 \Leftrightarrow x \\ &= \pm 40 \end{aligned}$$

Allez à : **Exercice 10 :**

Correction exercice 11 :

1. On pose $f(u) = |u - 1| + |u + 1|$

Si $u < -1$, $u - 1 < 0$ et $u + 1 < 0$ alors $f(u) = -(u - 1) - (u + 1) = -2u$

$$\forall u < -1, f(u) = 4 \Leftrightarrow -2u = 4 \Leftrightarrow u = -2$$

Si $-1 \leq u \leq 1$, $u - 1 < 0$ et $u + 1 > 0$ alors $f(u) = -(u - 1) + (u + 1) = 2$

$f(u) = 4$ n'a pas de solution

Si $u > 1$, $u - 1 > 0$ et $u + 1 > 0$ alors $f(u) = (u - 1) + (u + 1) = 2u$

$$\forall u > 1, f(u) = 4 \Leftrightarrow 2u = 4 \Leftrightarrow u = 2$$

Il y a deux solutions -2 et 2 .

2. D'après la première question il faut et il suffit de résoudre

$$\sqrt{x+1} = -2 \quad \text{et} \quad \sqrt{x+1} = 2$$

$\sqrt{x+1} = -2$ n'a pas de solution réelle et $\sqrt{x+1} = 2$ équivaut à $x+1 = 4$, c'est-à-dire à $x = 3$.

3.

$$x+2-2\sqrt{x+1} = x+1-2\sqrt{x+1}+1 = (\sqrt{x+1}-1)^2$$

Et

$$x+2+2\sqrt{x+1} = x+1+2\sqrt{x+1}+1 = (\sqrt{x+1}+1)^2$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \sqrt{x+2-2\sqrt{x+1}} + \sqrt{x+2+2\sqrt{x+1}} = 4 &\Leftrightarrow \sqrt{(\sqrt{x+1}-1)^2} + \sqrt{(\sqrt{x+1}+1)^2} = 4 \\ &\Leftrightarrow |\sqrt{x+1}-1| + |\sqrt{x+1}+1| = 4 \Leftrightarrow x = 3 \end{aligned}$$

Allez à : **Exercice 11 :**

Correction exercice 12 :

1.

$$\frac{2p}{2pq+3} < \frac{2p}{2pq} = \frac{1}{q} \leq 1$$

Donc X est majoré.

$$\frac{2p}{2pq+3} > 0$$

Donc X est minoré.

2. Fixons $q = 1$ et faisons tendre p vers l'infini.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2p}{2pq + 3} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2p}{2p + 3} = 1$$

Donc

$$\sup(X) \geq 1$$

D'autre part

$$\frac{2p}{2pq + 3} < 1$$

Donc $\sup(X) \leq 1$ et finalement $\sup(X) = 1$.

Allez à : **Exercice 12 :**

Correction exercice 13 :

Supposons que $\sqrt[3]{3 + 2\sqrt{6}}$ soit un nombre rationnel, il existe $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{Z}^*$, on peut supposer qu'il sont positifs tous les deux tels que

$$\sqrt[3]{3 + 2\sqrt{6}} = \frac{p}{q}$$

On élève au cube

$$3 + 2\sqrt{6} = \frac{p^3}{q^3} \Leftrightarrow 3 + 2\sqrt{6} = \frac{p^3}{q^3} \Leftrightarrow \sqrt{6} = \frac{1}{2} \left(\frac{p^3}{q^3} - 3 \right)$$

Ce qui signifie que $\sqrt{6} \in \mathbb{Q}$, il existe $p_1 \in \mathbb{N}$ et $q_1 \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\sqrt{6} = \frac{p_1}{q_1}$$

On peut supposer que p_1 et q_1 ne sont pas tous les deux pairs sinon on peut simplifier par 2.

$$\sqrt{6} = \frac{p_1}{q_1} \Leftrightarrow 6q_1^2 = p_1^2 \quad (1)$$

Si p_1 est impair, son carré est aussi impair ce qui est impossible d'après (1) donc p_1 est pair et donc q_1 est impair, il existe p_2 tel que $p_1 = 2p_2$ et q_2 tel que $q_1 = 2q_2 + 1$, ce que l'on remplace dans (1)

$$6(2q_2 + 1)^2 = 4p_2^2 \Leftrightarrow 3(4q_2^2 + 4q_2 + 1) = 2p_2^2 \Leftrightarrow 3 = 2p_2^2 - 12q_2^2 - 12q_2$$

Ce qui est impossible, donc $\sqrt[3]{3 + 2\sqrt{6}}$ n'est pas un nombre rationnel.

Allez à : **Exercice 13 :**

Correction exercice 14 :

Manifestement la suite de terme général $u_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$ est ni croissante ni décroissante, elle est même de signe alterné. Nous allons considérer les deux sous-suites $(v_n)_{n \geq 1}$ et $(w_n)_{n \geq 0}$ de nombres réels définies par

$$v_n = u_{2n} = 1 + \frac{1}{2n} \quad \text{et} \quad w_n = u_{2n+1} = -1 + \frac{1}{2n+1}$$

$$\forall n \geq 1, v_{n+1} - v_n = 1 + \frac{1}{2(n+1)} - \left(1 + \frac{1}{2n} \right) = \frac{2n - 2(n+1)}{2n(n+1)} = \frac{-1}{n(n+1)} < 0$$

Donc la suite $(v_n)_{n \geq 1}$ est décroissante

$$v_1 = \frac{3}{2} \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 1$$

$$\forall n \geq 1, w_{n+1} - w_n = -1 + \frac{1}{2(n+1)+1} - \left(-1 + \frac{1}{2n+1} \right) = \frac{2n+1 - (2n+3)}{(2n+3)(2n+1)}$$

$$= \frac{-2}{(2n+3)(2n+1)} < 0$$

$$w_0 = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = -1$$

$$X = \left\{1 + \frac{1}{2n}; n \in \mathbb{N}^*\right\} \cup \left\{-1 + \frac{1}{2n+1}; n \in \mathbb{m}\right\}$$

$$\sup(X) = \max\left(\sup\left(\left\{1 + \frac{1}{2n}; n \in \mathbb{N}^*\right\}\right), \sup\left(\left\{-1 + \frac{1}{2n+1}; n \in \mathbb{m}\right\}\right)\right) = \max\left(\frac{3}{2}, 0\right) = \frac{3}{2}$$

Remarque : $\sup(X) = \max(X)$

$$\inf(X) = \min\left(\inf\left(\left\{1 + \frac{1}{2n}; n \in \mathbb{N}^*\right\}\right), \inf\left(\left\{-1 + \frac{1}{2n+1}; n \in \mathbb{m}\right\}\right)\right) = \min(1, -1) = -1$$

Allez à : **Exercice 14 :**

Correction exercice 15 :

$$a^2 = \left(\sqrt{7+4\sqrt{3}} + \sqrt{7-4\sqrt{3}}\right)^2 = 7+4\sqrt{3} + 2\sqrt{7+4\sqrt{3}}\sqrt{7-4\sqrt{3}} + 7-4\sqrt{3}$$

$$= 14 + 2\sqrt{(7+4\sqrt{3})(7-4\sqrt{3})} = 14 + 2\sqrt{7^2 - 4^2 \times 3} = 14 + 2\sqrt{49 - 48}$$

$$= 14 + 2 \times 1 = 16$$

Les deux valeurs possibles de a sont $a = -4$ et $a = 4$, comme $a > 0$, on a

$$a = 4 \in \mathbb{Z}$$

Allez à : **Exercice 15 :**

Correction exercice 16 :

$$\alpha^2 = 4 - 2\sqrt{3} + 2\sqrt{4-2\sqrt{3}}\sqrt{4+2\sqrt{3}} + 4 + 2\sqrt{3} = 8 + 2\sqrt{4^2 - 2^2 \times 3} = 8 + 2\sqrt{4} = 12$$

Donc $\alpha = 2\sqrt{3}$ car $\alpha > 0$ et $2 \in \mathbb{N}$

Allez à : **Exercice 16 :**

Correction exercice 17 :

1. On pose pour tout $p \geq 1$:

$$u_p = \frac{(-1)^p}{p} + \frac{2}{p}$$

Cette suite est ni croissante ni décroissante (à vérifier)

On pose

$$\forall p \geq 1, v_p = u_{2p} = \frac{1}{2p} + \frac{2}{2p} = \frac{3}{2p} \quad \text{et} \quad \forall p \geq 0, w_p = u_{2p+1} = -\frac{1}{2p+1} + \frac{2}{2p+1} = \frac{1}{2p+1}$$

Les suites $(v_p)_{p \geq 1}$ et $(w_p)_{p \geq 0}$ sont décroissantes, c'est évident.

$$v_1 = \frac{3}{2} \quad \text{et} \quad \lim_{p \rightarrow +\infty} v_p = 0$$

$$w_0 = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{p \rightarrow +\infty} w_p = 0$$

$$\sup(X) = \max(v_p; p \geq 1, w_p; p \geq 0) = \max\left(\frac{3}{2}, 1\right) = \frac{3}{2}$$

Remarque cette borne supérieure est un maximum.

$$\inf(X) = \min(v_p; p \geq 1, w_p; p \geq 0) = \min(0; 0) = 0$$

Remarque : cette borne inférieure n'est pas un minimum.

2.

$$\sup(Y) = \sup\left(\left\{\frac{(-1)^p}{p}; p \in \mathbb{N}^*\right\}\right) + \sup\left(\left\{\frac{2}{q}; q \in \mathbb{N}^*\right\}\right)$$

En distinguant p pair et p impair, on voit que :

$$\sup\left(\left\{\frac{(-1)^p}{p}; p \in \mathbb{N}^*\right\}\right) = \frac{(-1)^2}{2} = \frac{1}{2}$$

Comme la suite de terme général de terme général $\frac{2}{q}$ est décroissante donc

$$\sup\left(\left\{\frac{2}{q}; q \in \mathbb{N}^*\right\}\right) = 2$$

On en déduit que

$$\sup(Y) = \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2}$$

Remarque : cette borne supérieure est un maximum.

$$\inf(Y) = \inf\left(\left\{\frac{(-1)^p}{p}; p \in \mathbb{N}^*\right\}\right) + \inf\left(\left\{\frac{2}{q}; q \in \mathbb{N}^*\right\}\right)$$

En allant un peu vite et en distinguant p pair et p impair

$$\inf\left(\left\{\frac{(-1)^p}{p}; p \in \mathbb{N}^*\right\}\right) = \frac{(-1)^1}{1} = -1$$

Comme la suite de terme général de terme général $\frac{2}{q}$ est décroissant et tend vers 0 donc

$$\inf\left(\left\{\frac{2}{q}; q \in \mathbb{N}^*\right\}\right) = 0$$

$$\inf(Y) = \inf\left(\left\{\frac{(-1)^p}{p}; p \in \mathbb{N}^*\right\}\right) + \inf\left(\left\{\frac{2}{q}; q \in \mathbb{N}^*\right\}\right) = -1 + 0 = -1$$

Remarque : cette borne inférieure n'est pas un minimum.

Allez à : **Exercice 17 :**

Correction exercice 18 :

1. Si α est rationnel alors

$$\sqrt{2} = \frac{\alpha - 6}{4}$$

Est rationnel, ce qui est faux d'après le cours.

Si β est rationnel alors

$$\sqrt{2} = \frac{\beta - 6}{-4}$$

Est rationnel, ce qui est faux d'après le cours.

Donc α et β sont irrationnel.

2.

$$\sqrt{\alpha\beta} = \sqrt{(6 + 4\sqrt{2})(6 - 4\sqrt{2})} = \sqrt{6^2 - 4^2 \times 2} = \sqrt{36 - 32} = \sqrt{4} = 2 \in \mathbb{Q}$$

3.

$$(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})^2 = \alpha + 2\sqrt{\alpha\beta} + \beta = 6 + 4\sqrt{2} + 4 + 6 - 4\sqrt{2} = 16$$

Comme $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} > 0$, $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} = 4 \in \mathbb{Q}$.

Allez à : **Exercice 18 :**

Correction exercice 19 :

1. Si $\sqrt{2} + \sqrt{3} \in \mathbb{Q}$ alors il existe $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\sqrt{2} + \sqrt{3} = \frac{p}{q}$$

Ce qui entraîne que

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} - \sqrt{3}$$

Puis on élève au carré

$$2 = \frac{p^2}{q^2} - \frac{2p}{q}\sqrt{3} + 3$$

On isole $\sqrt{3}$

$$\sqrt{3} = -\frac{q}{2p}\left(-\frac{p^2}{q^2} - 1\right)$$

Ce qui montre que $\sqrt{3} \in \mathbb{Q}$, il y a donc une contradiction, par conséquent

$$\sqrt{2} + \sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$$

Je rappelle que le raisonnement suivant est faux

$$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q} \quad \text{et} \quad \sqrt{3} \notin \mathbb{Q} \Rightarrow \sqrt{2} + \sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$$

2. Si $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 \in \mathbb{Q}$ alors il existe $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 = \frac{p}{q}$$

On élève au carré

$$2 + 2\sqrt{6} + 3 = \frac{p^2}{q^2}$$

On isole $\sqrt{6}$

$$\sqrt{6} = \frac{1}{2}\left(-1 + \frac{p^2}{q^2}\right)$$

Ce qui montre que $\sqrt{6} \in \mathbb{Q}$, il y a une contradiction donc

$$(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 \notin \mathbb{Q}$$

3. Si $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6} \in \mathbb{Q}$ alors il existe $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6} = \frac{p}{q}$$

Ce qui entraîne que

$$\sqrt{2} + \sqrt{3} = \frac{p}{q} - \sqrt{6}$$

Puis on élève au carré

$$2 + 2\sqrt{2}\sqrt{3} + 3 = \frac{p^2}{q^2} - \frac{2p}{q}\sqrt{6} + 6$$

Ce qui équivaut à

$$5 + 2\sqrt{6} + \frac{2p}{q}\sqrt{6} = 6 + \frac{p^2}{q^2}$$

Soit encore

$$\sqrt{6} = \frac{1 + \frac{p^2}{q^2}}{2 + \frac{2p}{q}}$$

Ce qui montre que $\sqrt{6} \in \mathbb{Q}$, il y a donc une contradiction par conséquent

$$\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6} \notin \mathbb{Q}$$

4. Si $(3\sqrt{2} + 2\sqrt{3} + \sqrt{6})^2 \in \mathbb{Q}$ alors il existe $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$(3\sqrt{2} + 2\sqrt{3} + \sqrt{6})^2 = \frac{p^2}{q^2}$$

On développe le carré avec la formule $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$

$$3^2 \times 2 + 2^2 \times 3 + 6 + 2 \times 3 \times 2\sqrt{2}\sqrt{3} + 2 \times 3\sqrt{2}\sqrt{6} + 2 \times 2\sqrt{3}\sqrt{6} = \frac{p^2}{q^2}$$

Puis

$$36 + 12\sqrt{6} + 6\sqrt{12} + 4\sqrt{18} = \frac{p^2}{q^2}$$

En simplifiant et en arrangeant les choses

$$12\sqrt{6} + 6\sqrt{2^2 \times 3} + 4\sqrt{3^2 \times 2} = \frac{p^2}{q^2} - 36$$

$$12\sqrt{6} + 12\sqrt{3} + 12\sqrt{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{p^2}{q^2} - 36 \right)$$

$$\sqrt{6} + \sqrt{3} + \sqrt{2} = \frac{1}{24} \left(\frac{p^2}{q^2} - 36 \right)$$

Ce qui entraîne que $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6} \in \mathbb{Q}$, ce qui est faux d'après la question 3. Il y a une contradiction donc

$$(3\sqrt{2} + 2\sqrt{3} + \sqrt{6})^2 \notin \mathbb{Q}$$

Allez à : **Exercice 19 :**

Correction exercice 20 :

1. On

$$\begin{cases} E(x) \leq x < E(x) + 1 \\ E(y) \leq y < E(y) + 1 \end{cases}$$

En faisant la somme

$$E(x) + E(y) \leq x + y < E(x) + E(y) + 2 \quad (*)$$

Donc

$$E(x + y) = E(x) + E(y) \quad \text{ou} \quad E(x + y) = E(x) + E(y) + 1$$

Car ce sont les deux seuls entiers dans l'intervalle

$$[E(x) + E(y), E(x) + E(y) + 2[$$

C'est bien ce que l'on voulait montrer.

Si dans (*) on prend la partie entière, on obtient

$$E(E(x) + E(y)) \leq E(x + y) \leq E(E(x) + E(y) + 2)$$

On est obligé de changer le « < » en « ≤ » dans la seconde égalité, à moins de préciser que $E(x) + E(y) + 2$ est un entier et alors l'inégalité reste stricte.

Puis comme $E(x) + E(y)$ et $E(x) + E(y) + 2$ sont des entiers

$$E(E(x) + E(y)) = E(x) + E(y) \quad \text{et} \quad E(E(x) + E(y) + 2) = E(x) + E(y) + 2$$

Et on obtient

$$E(x) + E(y) \leq E(x + y) \leq E(x) + E(y) + 2$$

Ce qui n'est exactement ce que l'on demandait (mais j'ai mis les points si vous avez fait cela en vous trompant en laissant l'inégalité stricte au lieu d'une inégalité large).

Beaucoup d'entre vous semble croire que

$$E(E(x) + E(y) + 2) = E(E(x)) + E(E(y)) + E(2) = E(x) + E(y) + 2$$

C'est correct uniquement parce que $E(x)$, $E(y)$ et 2 sont des entiers, j'ai eu la désagréable impression que certain pense que pour tout x et y , $E(x + y) = E(x) + E(y)$ ce qui est faux (enfin ce n'est pas toujours vrai).

2. Si $m + n$ est pair alors il existe $p \in \mathbb{Z}$ tel que $m + n = 2p$ alors

$$\begin{aligned} E\left(\frac{m+n}{2}\right) + E\left(\frac{n-m+1}{2}\right) &= E\left(\frac{2p}{2}\right) + E\left(\frac{2p-m-m+1}{2}\right) = E(p) + E\left(\frac{2p-2m+1}{2}\right) \\ &= p + E\left(p-m+\frac{1}{2}\right) = p + p - m = 2p - m = n \end{aligned}$$

Si $m + n$ est impair alors il existe $p \in \mathbb{Z}$ tel que $m + n = 2p + 1$

$$\begin{aligned}
E\left(\frac{m+n}{2}\right) + E\left(\frac{n-m+1}{2}\right) &= E\left(\frac{2p+1}{2}\right) + E\left(\frac{2p+1-m-m+1}{2}\right) \\
&= E\left(p + \frac{1}{2}\right) + E\left(\frac{2p-2m+2}{2}\right) = p + E(p-m+1) = p + p - m + 1 \\
&= 2p - m + 1 = n
\end{aligned}$$

Dans tous les cas on a

$$E\left(\frac{m+n}{2}\right) + E\left(\frac{n-m+1}{2}\right) = n$$

3.

$$\begin{aligned}
E\left((\sqrt{n} + \sqrt{n+1})^2\right) &= E(n + 2\sqrt{n}\sqrt{n+1} + n + 1) = E(2n + 1 + 2\sqrt{n(n+1)}) \\
&= 2n + 1 + E(2\sqrt{n(n+1)}) \\
(2\sqrt{n(n+1)})^2 &= 4n(n+1) = 4n^2 + 4n
\end{aligned}$$

Or

$$4n^2 \leq 4n^2 + 4n < 4n^2 + 4n + 1$$

Ce qui équivaut à

$$2n \leq 2\sqrt{n(n+1)} < 2n + 1$$

Par conséquent

$$E(2\sqrt{n(n+1)}) = 2n$$

On a donc pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$E\left((\sqrt{n} + \sqrt{n+1})^2\right) = 4n + 1$$

Allez à : **Exercice 20** :

Correction exercice 21 :

- Premier cas :

$$E(x) \leq x < E(x) + \frac{1}{2} (*) \quad \text{et} \quad E(y) \leq y < E(y) + \frac{1}{2} (**)$$

En faisant la somme de ces inégalités

$$E(x) + E(y) \leq x + y < E(x) + E(y) + 1$$

On en déduit que

$$E(x + y) = E(x) + E(y)$$

On multiplie (*) et (**) par 2.

$$2E(x) \leq 2x < 2E(x) + 1 \Rightarrow E(2x) = 2E(x)$$

$$2E(y) \leq 2y < 2E(y) + 1 \Rightarrow E(2y) = 2E(y)$$

Donc

$$\begin{aligned}
E(x) + E(y) + E(x + y) &= E(x) + E(y) + E(x) + E(y) = 2E(x) + 2E(y) = E(2x) + E(2y) \\
&\leq E(2x) + E(2y)
\end{aligned}$$

- Deuxième cas :

$$E(x) + \frac{1}{2} \leq x < E(x) + 1 (*) \quad \text{et} \quad E(y) \leq y < E(y) + \frac{1}{2} (**)$$

En faisant la somme de ces inégalités

$$E(x) + E(y) + \frac{1}{2} \leq x + y < E(x) + E(y) + \frac{3}{2}$$

On en déduit que

$$E(x) + E(y) \leq E(x + y) \leq E(x) + E(y) + 1$$

On multiplie (*) et (**) par 2.

$$2E(x) + 1 \leq 2x < 2E(x) + 2 \Rightarrow E(2x) = 2E(x) + 1$$

$$2E(y) \leq 2y < 2E(y) + 1 \Rightarrow E(2y) = 2E(y)$$

Donc

$$E(x) + E(y) + E(x + y) \leq E(x) + E(y) + E(x) + E(y) + 1 = 2E(x) + 1 + 2E(y) = E(2x) + E(2y) \\ \leq E(2x) + E(2y)$$

• Troisième cas :

$$E(x) \leq x < E(x) + \frac{1}{2} (*) \quad \text{et} \quad E(y) + \frac{1}{2} \leq y < E(y) + 1 (**)$$

En faisant la somme de ces inégalités

$$E(x) + E(y) + \frac{1}{2} \leq x + y < E(x) + E(y) + \frac{3}{2}$$

On en déduit que

$$E(x) + E(y) \leq E(x + y) = E(x) + E(y) + 1$$

On multiplie (*) et (**) par 2.

$$2E(x) \leq 2x < 2E(x) + 1 \Rightarrow E(2x) = 2E(x) \\ 2E(y) + 1 \leq 2y < 2E(y) + 2 \Rightarrow E(2y) = 2E(y) + 1$$

Donc

$$E(x) + E(y) + E(x + y) \leq E(x) + E(y) + E(x) + E(y) + 1 = 2E(x) + 2E(y) + 1 = E(2x) + E(2y) \\ \leq E(2x) + E(2y)$$

• quatrième cas :

$$E(x) + \frac{1}{2} \leq x < E(x) + 1 (*) \quad \text{et} \quad E(y) + \frac{1}{2} \leq y < E(y) + 1 (**)$$

En faisant la somme de ces inégalités

$$E(x) + E(y) + 1 \leq x + y < E(x) + E(y) + 2$$

On en déduit que

$$E(x + y) = E(x) + E(y) + 1$$

On multiplie (*) et (**) par 2.

$$2E(x) + 1 \leq 2x \leq 2E(x) + 2 \Rightarrow E(2x) = 2E(x) + 1 \\ 2E(y) + 1 \leq 2y \leq 2E(y) + 2 \Rightarrow E(2y) = 2E(y) + 1$$

Donc

$$E(x) + E(y) + E(x + y) = E(x) + E(y) + E(x) + E(y) + 1 = 2E(x) + 2E(y) + 1 \leq 2E(x) + 1 + E(y) + 1 \\ = E(2x) + E(2y)$$

Allez à : **Exercice 21** :

Correction exercice 22 :

1. Si B est minoré alors il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $y \in B$, $m \leq y$ alors il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $y \in B$, $-y \leq -m$, comme tous les éléments de A sont de la forme $-y$, $y \in B$, cela montre qu'il existe $-m \in \mathbb{R}$ tel que pour tous $x \in A$, $x \leq -m$, autrement dit A est majoré.

Réciproque :

Si A est majoré, il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tous $x \in A$, $x \leq M$ alors il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tous $x \in A$, $-M \leq -x$, comme tous les éléments de B sont de la forme $-x$, $x \in A$, il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tous $y \in B$, $-M \leq y$, autrement dit B est minoré.

2. Si A est majoré, A admet une borne supérieure $\sup(A)$ et d'après le 1. B est minoré et donc admet une borne inférieure $\inf(B)$.

Pour tout M un majorant de A : $\sup(A) \leq M$

D'après 1. $-M$ est un minorant de B : $-M \leq \inf(B)$

On en déduit que pour tout M , majorant de A : $-\inf(B) \leq M$, cela entraîne que

$$-\inf(B) \leq \sup(A)$$

De même pour m un minorant de B : $m \leq \inf(B)$

D'après 1. $-m$ est un majorant de A : $\sup(A) \leq -m$

On en déduit que pour tout m , minorant de B : $\sup(A) \leq -m$, cela entraîne que

$$\sup(A) \leq -\inf(B)$$

Donc

$$\sup(A) = -\inf(B) \Leftrightarrow \inf(B) = -\sup(A)$$

Allez à : **Exercice 22 :**

Correction exercice 23 :

Si n est pair, il existe $m \geq 1$ tel que $n = 2m$

$$P'(x) = 2mx^{2m-1} + p \quad \text{et} \quad P''(x) = 2m(2m-1)x^{2m-2}$$

Comme $2m - 2$ est pair pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P''(x) > 0$ donc P' est croissante sur \mathbb{R} .

Comme $2m - 1$ est impair

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (2mx^{2m-1} + p) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (2mx^{2m-1} + p) = +\infty$$

P' est une bijection de \mathbb{R} sur \mathbb{R} donc il existe un unique $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $P'(\alpha) = 0$ et tel que

$$x < \alpha \Rightarrow P'(x) < 0 \quad \text{et} \quad x > \alpha \Rightarrow P'(x) > 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^{2m} + px + q) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^{2m} + px + q) = +\infty$$

Le tableau de variation de P est

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$P'(x)$		-	0
$P(x)$	$+\infty$	\searrow	$P(\alpha)$
		\nearrow	$+\infty$

Si $P(\alpha) > 0$ alors P n'a pas de solution.

Si $P(\alpha) = 0$ alors P n'a qu'une solution : α .

Si $P(\alpha) < 0$ alors P a deux solutions.

Si n est pair, il existe $m \geq 0$ tel que $n = 2m + 1$

$$P'(x) = (2m+1)x^{2m} + p \quad \text{et} \quad P''(x) = (2m+1)2mx^{2m-1}$$

Comme $2m - 1$ est impair :

Si $x < 0$ alors $P''(x) < 0$ et $x > 0$ alors $P''(x) > 0$. De plus $P'(0) = p$. Comme $2m$ est pair les limites de P' en $\pm\infty$ sont $+\infty$.

On en déduit le tableau de variation de P'

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$P''(x)$		-	0
$P'(x)$	$+\infty$	\searrow	p
		\nearrow	$+\infty$

Si $p \geq 0$ alors $\forall x \neq 0, P'(x) > 0$ et $P'(0) = 0$ ce qui montre que P est strictement croissante, comme $2m + 1$ est impair

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = +\infty$$

Cela montre que P est une bijection de \mathbb{R} sur \mathbb{R} , donc il existe un unique $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $P(x_0) = 0$.

Si $p < 0$ alors il existe deux réels $\beta < 0$ et $\gamma > 0$ tels que $P'(\beta) = P'(\gamma) = 0$ et tels que le signe de P' soit strictement positif sur $]-\infty, \beta[\cup]\gamma, +\infty[$ et strictement négatif sur $]\beta, \gamma[$. comme $2m + 1$ est impair

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = +\infty$$

On en déduit le tableau de variation de P

x	$-\infty$	β	γ	$+\infty$
$P'(x)$		+	0	-
$P(x)$	$-\infty$	\nearrow	$P(\beta)$	\searrow
		$P(\gamma)$	\nearrow	$+\infty$

Si $P(\beta)$ et $P(\gamma)$ sont strictement positifs ou strictement négatifs ($P(\beta)P(\gamma) > 0$) alors P n'a qu'une racine.

Si $P(\beta)$ ou $P(\gamma)$ est nul ($P(\beta)P(\gamma) = 0$), remarque les deux ne peuvent pas être nul en même temps alors P a deux racines.

Si $P(\alpha) > 0$ et $P(\beta) < 0$ alors P a trois racines.

Allez à : **Exercice 23** :

Correction exercice 24 :

1. $E \subset [0,1]$, ce qui signifie que E est une partie de \mathbb{R} bornée par 1 et non vide car $a = 0 \times (b - a) \in E$ donc E admet une borne supérieure.
2. Si $a + T(b - a) \in A$ alors il existe $\epsilon > 0$ tel que

$$]a + T(b - a) - \epsilon, a + T(b - a) + \epsilon[\in A$$

Car A est un ouvert.

Ce qui entraîne que

$$a + T(b - a) + \frac{\epsilon}{2} \in A$$

Or

$$a + T(b - a) + \frac{\epsilon}{2} = a + T(b - a) + \frac{1}{2} \times \frac{\epsilon}{b - a} (b - a) = a + \left(T + \frac{1}{2} \times \frac{\epsilon}{b - a} \right) (b - a)$$

Donc

$$a + \left(T + \frac{1}{2} \times \frac{\epsilon}{b - a} \right) (b - a) \in A$$

Et par définition de E :

$$T + \frac{1}{2} \times \frac{\epsilon}{b - a} \in E$$

Ce qui n'est pas possible car

$$T < T + \frac{1}{2} \times \frac{\epsilon}{b - a}$$

Et T est supposé être la borne supérieure de E .

Par conséquent $a + T(b - a) \notin A$.

3. $T \in [0,1]$ donc

$$0 \leq T(b - a) \leq b - a$$

Ce qui entraîne que

$$a \leq a + T(b - a) \leq b$$

$a + T(b - a) \in [a, b]$ comme I est un intervalle $a + T(b - a) \in I$, de plus D'après 2.

$a + T(b - a) \notin A$ donc $a + T(b - a) \in B$ puisque $A \cup B = I$.

4. Comme B est ouvert et que $a + T(b - a) \in B$ il existe ϵ tel que

$$]a + T(b - a) - \epsilon, a + T(b - a) + \epsilon[\in B$$

Ce qui entraîne que

$$a + T(b - a) - \frac{\epsilon}{2} \in B$$

Or

$$a + T(b - a) - \frac{\epsilon}{2} = a + T(b - a) - \frac{1}{2} \times \frac{\epsilon}{b - a} (b - a) = a + \left(T - \frac{1}{2} \times \frac{\epsilon}{b - a} \right) (b - a)$$

Donc

$$a + \left(T - \frac{1}{2} \times \frac{\epsilon}{b - a} \right) (b - a) \in B$$

Ce qui entraîne que

$$a + \left(T - \frac{1}{2} \times \frac{\epsilon}{b - a} \right) (b - a) \notin A$$

Comme $T - \frac{1}{2} \times \frac{\epsilon}{b - a} < T \leq 1$, $T - \frac{1}{2} \times \frac{\epsilon}{b - a} \in [0,1]$ (quitte à diminuer ϵ pour que $T - \frac{1}{2} \times \frac{\epsilon}{b - a}$ reste positif) et par définition de E :

$$T - \frac{1}{2} \times \frac{\epsilon}{b - a} \notin E$$

Ce qui n'est pas possible car

$$T - \frac{1}{2} \times \frac{\epsilon}{b-a} < T$$

Comme pour tout $\epsilon' > 0$, $T - \epsilon' \in E$, en prenant

$$\epsilon' = \frac{1}{2} \times \frac{\epsilon}{b-a}$$

Il y a une contradiction. Elle se situe dans l'implication

$$a + \left(T - \frac{1}{2} \times \frac{\epsilon}{b-a}\right)(b-a) \in B \Rightarrow a + \left(T - \frac{1}{2} \times \frac{\epsilon}{b-a}\right)(b-a) \notin A$$

C'est-à-dire dans le fait que $A \cap B = \emptyset$

Allez à : **Exercice 24** :